オペレーションズ・リサーチ入門

補遺・解答付

行方　常幸　著

URL: https://namekata.in.net/

はじめに

本書はオペレーションズ･リサーチの入門書である。簡単な数値例を手計算で（また、可能な場合は計算機などを利用して）解くことにより、オペレーションズ･リサーチの入門的な事柄を理解することを目標とする。

本書で扱うトピックは線形計画法（定式化、シンプレックス法、双対問題、応用)、ゲーム理論（ゼロ和ゲーム、ゲームの値、按点、非ゼロ和ゲーム、ナッシュ均衡）AHP（AHP とは、AHP の基礎)、等である

本文でも利用しているが、ダウンロード可能な実行ファイル「線形計画法」（LinearProgrammingFX.exe）を https://namekata.in.net/wp/javafx/アプリケーション集/ で公開している。ご利用下さい。

目次

線形計画法（Linear Programming）

「1 次制約式の元で 1 次式の値を最大化（最小化）する」問題を考察する。まず、例からはじめる。

例 1（利益最大化問題）： 4 種類の原料を利用して、3 種類の製品を製造する。手元にある原料の量、各製品を 1 単位製造するときに必要な各資源の量、製品の販売単価は下の表のように与えられている。

	製品 1	製品 2	製品 3	手持ち資源の量
原料 1	8	7	7	80
原料 2	10	6	7	90
原料 3	8	5	4	70
原料 4	8	12	8	100
販売単価	16	14	13	

製造した製品がすべて売れると仮定した場合、最大の利益を得るには各製品をどれだけ製造すればよいだろうか？

例 2（費用最小化問題）： 私たちは 3 種類の成分をある必要量摂取しなければならないとする。しかしながら、これらの成分は単独では存在せず、それらを含む 4 種類の原料を購入することによって、必要量を満たさなければならない。各成分の摂取必要量、各原料 1 単位に含まれる各成分量、各原料の購入単価が次の表のように与えられている。

	原料 1	原料 2	原料 3	原料 4	成分の必要量
成分 1	8	10	8	8	16
成分 2	7	6	5	12	14
成分 3	7	7	4	8	13
原料単価	80	90	70	100	

最小の購入費用で摂取必要量をまかなうには、どれをどれだけ購入すればよいか？

定式化

例 1 の定式化：

製品 i の製造量を x_i とすると、

$$
\max 16x_1 + 14x_2 + 13x_3
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 7x_3 \le 80 \\ 10x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 90 \\ 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 70 \\ 8x_1 + 12x_2 + 8x_3 \le 100 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}
$$

となる[1]。1 次不等式の制約条件の下で、1 次式の値を最大にする問題である。

例 2 の定式化：

原料 j の購入量を y_j とすると、

$$
\min 80y_1 + 90y_2 + 70y_3 + 100y_4
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases} 8y_1 + 10y_2 + 8y_3 + 8y_4 \ge 16 \\ 7y_1 + 6y_2 + 5y_3 + 12y_4 \ge 14 \\ 7y_1 + 7y_2 + 4y_3 + 8y_4 \ge 13 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}
$$

となる。また、同じことであるが、

$$
\max -80y_1 - 90y_2 - 70y_3 - 100y_4
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases} -8y_1 - 10y_2 - 8y_3 - 8y_4 \le -16 \\ -7y_1 - 6y_2 - 5y_3 - 12y_4 \le -14 \\ -7y_1 - 7y_2 - 4y_3 - 8y_4 \le -13 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}
$$

---

[1] s.t. は subject to ・・・ の略で「・・・を条件として」という意味である。

となる。これも、1 次不等式の制約条件の下で、1 次式の値を最大にする問題である。

　一般に

$$
\max c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n
$$
$$
\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n \ge 0 \end{cases}
$$

が線形計画問題の標準形である。$x_1,...,x_n$ のように、0 以上の値しかとらない変数を**非負変数**という。

問 1-1： 友達 4 人が各自の持っている材料を使ってパンを作り儲けようとしている。4 人が持っているのは、各々、小麦粉 2kg、バター200g、砂糖 400 g 、レーズン 400 g である。(他に必要なものは、十分にあると仮定する。) 普通のパン、高級パン、レーズンパンは 1 斤あたり、各々、200 円、250 円、300 円で売れる。また、普通のパンを 1 斤作るには、小麦粉 300g、バター15g、砂糖 20g が必要である。高級パンを 1 斤作るには、小麦粉 300g、バター40g、砂糖 30g、レーズン 50g が必要である。レーズンパンを 1 斤作るには、小麦粉 250g、バター30g、砂糖 30g、レーズン 150g が必要である。作ったパンが全部売れるとして、利益を最大にするには、何をどれだけ作ればよいか？ (=>解答)

問 1-2： 自分で利益最大化問題と費用最小化問題の例を作り、定式化せよ。

図による解法

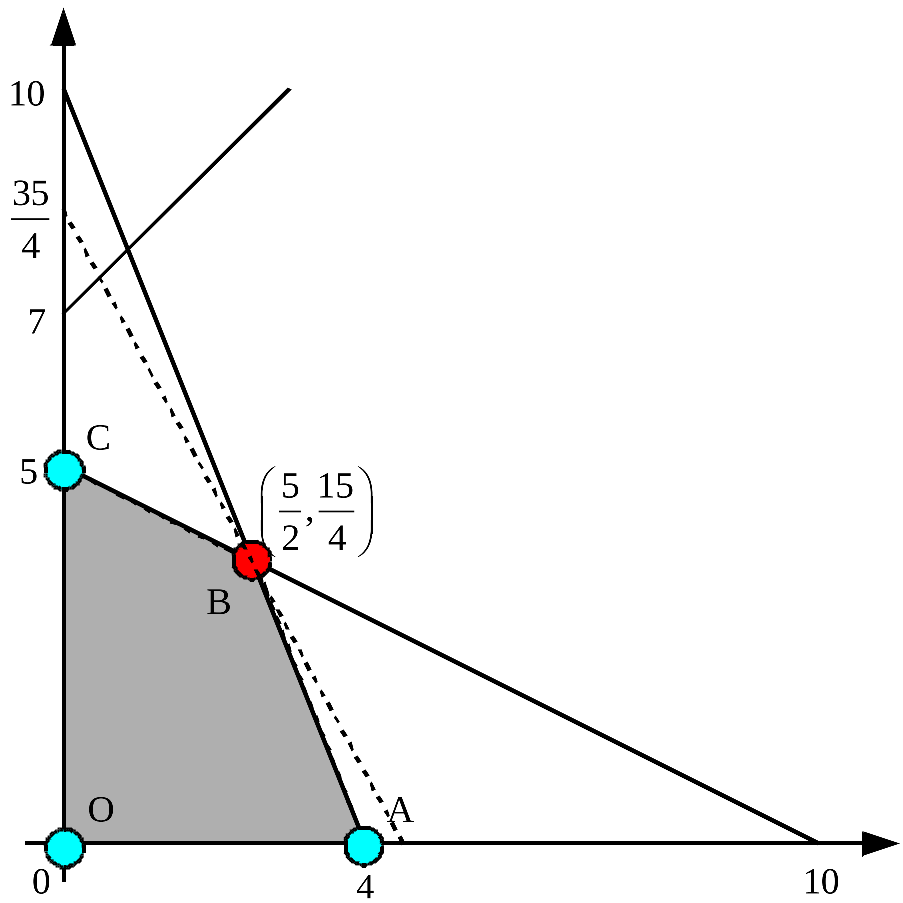
　2 変数の場合の線形計画問題は次の例のように図を利用して解ける。

例 3：

$$\max\ 2x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ -x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

x_1-x_2 平面の第 1 象限に次の 3 本の直線と 1 つの直線群を描く。

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 = 10 \\ &5x_1 + 2x_2 = 20 \\ &-x_1 + x_2 = 7 \\ &2x_1 + x_2 = k \end{aligned}$$



最初の 2 本の直線と座標軸に囲まれた領域が x_1 と x_2 が動く範囲である。この範

囲は$O=(0,0)$、$A=(4,0)$、$B=\left(\frac{5}{2},\frac{15}{4}\right)$、$C=(0,5)$の 4 個の端点[2]からなる凸包[3]である。4 本目の直線がこの範囲と共通部分を持ち、かつ、kが最大となるのは$\left(\frac{5}{2},\frac{15}{4}\right)$の点で最大値は$\frac{35}{4}$となることが分かる。

重要な観察：

- 1 次不等式からなる制約式が満たす領域は有限個の**端点**からなる**凸集合**[4]となる。
- 1 次式である目的関数は端点において最適値を取る（端点以外でも最適値を取ることはある）。

従って、制約式が満たす領域の端点のみの目的関数の値を調べて、その中の最適値を求めればよい。しかし、端点をすべて列挙するのは、問題の規模が大きくなると困難なので、望ましくない。

適当な端点から始めて目的関数がより良い値になる隣の端点へ移動する、というアイデアを採用する。線形計画法では、局所的な最適値に留まるということがなく、この考えが上手くいく。=>シンプレックス法

疑問：

グラフ上では、端点とはどのようなものか分かったが、式の上ではどのようなものなのか？（=>）

[2] ある集合の端点とは､その集合に属する 2 点の中点として表現できない点のことである。直感的にはその集合の端の点である。

[3] いくつかの点の凸包とは､それらの点を含む凸集合で包含関係の意味で最小の集合である。直感的には、そのいくつかの点にピンを刺し、弛まない糸で囲んでできる図形である。

[4] ある集合の任意の 2 点を両端とする線分がその集合に含まれている時､その集合を凸集合と呼ぶ。直感的には、へこみがない集合である。

シンプレックス法

前述の例で、適当な端点から始めて目的関数がより良い値になる隣の端点へ移動する、というアイデアがどのようなものか見てみる。まず、等式制約に変形する。

$$
\begin{aligned}
&\max z\\
&\quad 2x_1 + x_2 \qquad\qquad -z = 0\\
&\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad = 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \qquad = 20 \\ -x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

この時点での注意事項は「すべての変数が非負」である。

変数 x と+等の記号を毎回書くのが面倒なので、次のような表形式にまとめる。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1	商
1 行目	1	2	1	0	0	10	10
2 行目	5*	2	0	1	0	20	4*
3 行目	−1	1	0	0	1	7	
	2*	1	0	0	0	0	

この表は次の重要な特徴を持っておりシンプレックス表と呼ばれている[5]。

（最上行に「1」と書いてある）1 番右の列の要素は、最下行（今は、「0」が入っている）を除いて、非負であること。（今は、「10,20,7」が入っている。）

変数 x_3、x_4、x_5 の列のように最上行と最下行を除いて得られる列ベクトルが基本ベクトルである。$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

これらの変数の列の最下行（目的関数の行）には 0 が入っている。

この表は方程式の変数名と+等の記号を省いて書いたものであったから、上記の特徴により、次のことも得られる。

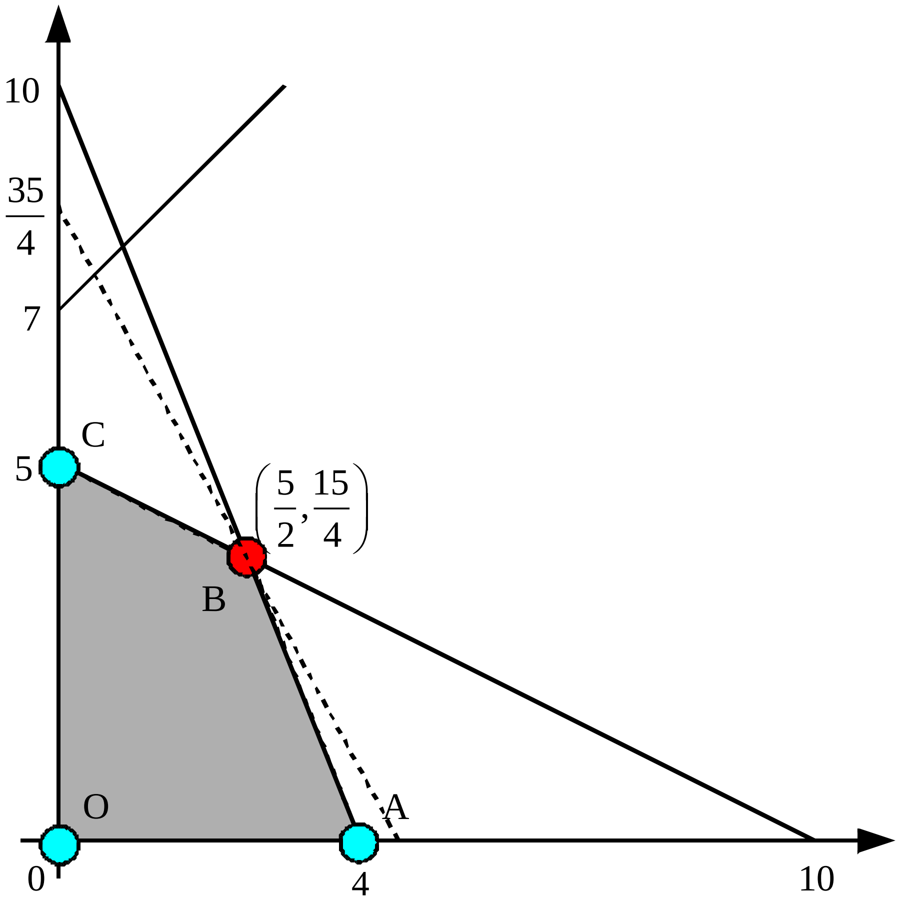
$$x_1 = x_2 = 0, x_3 = 10, x_4 = 20, x_5 = 7$$

は制約式を満たす解であり、この時の目的関数の値は 0 である。この解は**実行**

[5] 最初に与えられた問題を等式制約に変えた時にこれらの特徴を持った表が得られない場合は、そうなるように制約式等をさらに変形する必要がある。

可能基底解と呼ばれる。ここで、実行可能解とは制約条件式を満たす解ということであり、基底解とは上記の 2 を満たす解ということである。また、基本ベクトルに対応する変数（今は、x_3、x_4、x_5）を**基底変数**と呼び、それ以外の変数を**非基底変数**と呼ぶ。

重要な事項：
端点とは実行可能基底解のことである。



以上のことから、今の場合、上記のアイデアのうち、初期値となる適当な端点（実行可能基底解）が得られていることになる（今の場合、点 O である）。

さて、この時点で最適解が得られているのだろうか？もし得られていないのなら、目的関数が良くなる（今の場合、大きくなる）ような、隣の端点を探す。隣の端点とは、現在の非基底変数（値は 0 である）を 1 つ選び、それを基底変数（値を非負）にし、基底変数の中の 1 つを非基底変数（値を 0）にすることを意味する。目的関数（非基底変数のみで表現されていることに注意！）

$$z = 2x_1 + x_2$$

を見ると、x_1、x_2のどちらの非基底変数を 0 から正の値に増加させても、係数が正であるので、目的関数の値は増加する。どちらの変数を基底変数にしても構わないのであるが、どちらかに決める必要があるので、今後、係数が正で最

大のものを選ぶことにする（最大値が複数あればどれかを選ぶ）。今の場合は、x_1である。

$x_2 = 0$のままでx_1を 0 から正の値に増加させると

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \quad + x_4 & = 20 \\ -x_1 + x_2 \quad\quad + x_5 & = 7 \end{cases}$$

の 1 本目の等式より$x_1 = 10$まで増加させると、丁度$x_3 = 0$となる。x_3は非負でなければならないので、x_1をこれ以上増加させることはできない。2 本目の等式より、x_4は非負でなければならないので、$x_1 = \dfrac{20}{5} = 4$まで増加させることができる。3 本目の等式においては、x_1の係数が負であるので、x_1を増加させてもx_5が負になることがない。従って、この 3 本目の式は無視できる。従って、10 と 4 の最小値を求めて、$x_1 = 4$まで増加させることができ、その結果、x_4が基底変数から非基底変数になる。

以上のことをシンプレックス表の上で行う。

最適性のチェック：
最下行において、最右列の要素を除いて、正の要素がなければ、このシンプレックス表に対応する実行可能基底解が最適解である。

（実行可能解であるが）最適でない場合；ピボットの選択：
最下行において、最右列の要素を除いて、正の要素で最大のものを（複数個あればどれか 1 つを）選ぶ（星印をつける）。
その列の上方にある正の要素について（非正の要素に対しては無視し何もしない)、その要素で同じ行の最右列の値を割る。それらの商の中で最小値を選ぶ（星印をつける）。
1 で星印をつけた列にあり、2 で星印をつけた行にある要素を選ぶ（星印をつける）。この要素は**ピボット**と呼ばれる。

注意（非有界）：
上記の（実行可能解であるが）最適でない場合のピボットの選択において；最下行において、最右列の要素を除いて、正の要素があり（最大のものでなくてよい）、その列の上方には非正の要素しかない場合、目的関数の値を限りなく大きくできるので、非有界となる。

今の場合、ピボットは 2 行 1 列である。次に、隣の端点に対応するシンプレックス表を得るために次のように計算を行う。

ピボット演算：
1. ピボットが 1 になるように、ピボット行をピボットの値で割る。

2. ピボット列においてピボット以外の行の要素が 0 になるように、ピボット行の定数倍をその行に加える。

今の場合、(1) 5 で第 2 行を割る。(2) 新しい 2 行の –1倍を 1 行へ、1 倍を 3 行に加える。2 行の –2倍を最下行（目的関数の行）に加える。その結果、

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1	商
1 行目	0	$\frac{8}{5}$*	1	$-\frac{1}{5}$	0	6	$\frac{30}{8}$*
2 行目	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	4	10
3 行目	0	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1	11	$\frac{55}{7}$
	0	$\frac{1}{5}$*	0	$-\frac{2}{5}$	0	–8	

となる。この表に対応する実行可能基底解は

$$x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 6, x_4 = 0, x_5 = 11$$

であり、この端点は A 点に対応する。この時点における目的関数の値は 8 である（表の数値の–1 倍である)。最下行に（最右列の要素を除いて）正の要素があるので、まだ最適解ではない。従って、ピボットを求めて、さらにピボット演算を行う。(以下では、商の列は省略する。)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
1 行目	0	1	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{15}{4}$
2 行目	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{2}$
3 行目	0	0	$-\frac{7}{8}$	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{23}{4}$
	0	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	0	$-\frac{35}{4}$

となり、最下行に（最右列の要素を除いて）正の要素がないので、最適解である。実行可能基底解は

$$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = \frac{15}{4}, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = \frac{23}{4}$$

となり、B 点に対応する。目的関数の値は $\frac{35}{4}$ となる。元の変数だけ取り出し、「$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = \frac{15}{4}$ の時、最大値 $\frac{35}{4}$ を取る」が答えとなる。

例 1（続き）： 例 1 を（シンプレックス法で）解く。

$$\max\ 16x_1 + 14x_2 + 13x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 7x_3 \le 80 \\ 10x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 90 \\ 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 70 \\ 8x_1 + 12x_2 + 8x_3 \le 100 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	SL_1	SL_2	SL_3	SL_4	1
8	7	7	1	0	0	0	80
10	6	7	0	1	0	0	90
8*	5	4	0	0	1	0	70
8	12	8	0	0	0	1	100
16	14	13	0	0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	SL_1	SL_2	SL_3	SL_4	1
0	2	3	1	0	–1	0	10
0	–1/4	2*	0	1	–5/4	0	5/2
1	5/8	1/2	0	0	1/8	0	35/4
0	7	4	0	0	–1	1	30
0	4	5	0	0	–2	0	–140

x_1	x_2	x_3	SL_1	SL_2	SL_3	SL_4	1
0	19/8*	0	1	–3/2	7/8	0	25/4
0	–1/8	1	0	1/2	–5/8	0	5/4
1	11/16	0	0	–1/4	7/16	0	65/8
0	15/2	0	0	–2	3/2	1	25
0	37/8	0	0	–5/2	9/8	0	–585/4

x_1	x_2	x_3	SL_1	SL_2	SL_3	SL_4	1
0	1	0	8/19	–12/19	7/19	0	50/19
0	0	1	1/19	8/19	–11/19	0	30/19
1	0	0	–11/38	7/38	7/38	0	120/19
0	0	0	–60/19	52/19*	–24/19	1	100/19
0	0	0	–37/19	8/19	–11/19	0	–3010/19

x_1	x_2	x_3	SL_1	SL_2	SL_3	SL_4	1
0	1	0	–4/13	0	1/13	3/13	50/13
0	0	1	7/13	0	–5/13	–2/13	10/13
1	0	0	–1/13	0	7/26	–7/104	155/26
0	0	0	–15/13	1	–6/13	19/52	25/13
0	0	0	–19/13	0	–5/13	–2/13	–2070/13

となり、$x_1 = \frac{155}{26} = 5\frac{25}{26}, x_2 = \frac{50}{13} = 3\frac{11}{13}, x_3 = \frac{10}{13}$ の時、最大値 $\frac{2070}{13} = 159\frac{3}{13}$ をとる。

例 2（続き）：例 2 を（シンプレックス法で）解く。最大化問題に置き換えて、

$$\max -80y_1 - 90y_2 - 70y_3 - 100y_4$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} -8y_1 - 10y_2 - 8y_3 - 8y_4 \le -16 \\ -7y_1 - 6y_2 - 5y_3 - 12y_4 \le -14 \\ -7y_1 - 7y_2 - 4y_3 - 8y_4 \le -13 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

y_1	y_2	y_3	y_4	SU_1	SU_2	SU_3	1	商
–8	–10	–8	–8	1	0	0	–16	
–7	–6	–5	–12	0	1	0	–14	
–7*	–7	–4	–8	0	0	1	–13	13/7
–80	–90	–70	–100	0	0	0	0	

上記の表において、最右列の要素に（最下行の要素を除き）負のものがあるので、まずそれを非負にする必要がある。この部分の計算方法は次の通りである。

実行可能解を探す場合；ピボットの選択：

最右列（「1」の列）において、最下行の要素を除いて、下の方から負の要素を探す。この要素がある行（k 行とする）から負の要素を（どれでも良いから）選ぶ（ここではなるべく左にあるものを選ぶことにする）。この要素がある列を j 列とする。k 行を含み k 行よりも下にある行に関して、最右列の要素を j 列の要素で割る（ただし、商が正となるもののみ）。これらの商の中で最小値を与える行を i 行とする。i 行 j 列にある要素がピボットである。

注意（実行不可能）：

上記の、実行可能解を探す場合のピボットの選択において；k 行に最右列を除いて負の要素がない場合、制約条件を満たす変数の値が存在しない。すなわち、実行不可能である。

y_1	y_2	y_3	y_4	SU_1	SU_2	SU_3	1	商
0	–2	–24/7	8/7	1	0	–8/7	–8/7	
0	1	–1*	–4	0	1	–1	–1	1
1	1	4/7	8/7	0	0	–1/7	13/7	13/4
0	–10	–170/7	–60/7	0	0	–80/7	1040/7	

y_1	y_2	y_3	y_4	SU_1	SU_2	SU_3	1
0	–38/7	0	104/7*	1	–24/7	16/7	16/7
0	–1	1	4	0	–1	1	1
1	11/7	0	–8/7	0	4/7	–5/7	9/7
0	–240/7	0	620/7	0	–170/7	90/7	1210/7

最右列の要素が（最下行の要素を除き）非負になったので通常のように進む。

y_1	y_2	y_3	y_4	SU_1	SU_2	SU_3	1
0	–19/52	0	1	7/104	–3/13	2/13	2/13
0	6/13	1	0	–7/26	–1/13	5/13	5/13
1	15/13	0	0	1/13	4/13	–7/13	19/13
0	–25/13	0	0	–155/26	–50/13	–10/13	2070/13

となり、$y_1=\dfrac{19}{13}=1\dfrac{6}{13}, y_2=0, y_3=\dfrac{5}{13}$ の時、最大値$-\dfrac{2070}{13}=-159\dfrac{3}{13}$をとる。元の最小化問題に戻すと、最小値は$159\dfrac{3}{13}$となる。ここで、例 1 の最大値と例 2 の最小値が一致することに注意を喚起しておこう。

問 1-3： 問 1-1 を解け。(=>解答)

問 1-4： 問 1-2 を解け。

問 1-5： 次の線形計画問題を解け。(=>解答)

(1)
$$\min x_1+2x_2+3x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2-x_3\le 10 \\ 2x_1+x_2-x_3=5 \\ x_2+x_3\ge 1 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

(2)
$$\min 4x_1+6x_2-x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3\le 1 \\ x_1+3x_2+2x_3\le 1 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

(3)
$$\max 2x_1+x_2+3x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 \qquad\quad +2x_3\le 2 \\ 5x_1+2x_2+7x_3\le 1 \\ 2x_1+4x_2+x_3\le 10 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

双対問題と双対定理

次の 2 つの線形計画問題には深い関係がある。

(A)

$$
\max c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 \end{cases}
$$

と

(B)

$$
\min b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \ge 0 \end{cases}
$$

一方を「**原問題**」とすれば他方はその「**双対問題**」と呼ばれる。すなわち、2 つの問題は互いの双対問題になっている。例 1（利益最大化問題）と例 2（費用最小化問題）が互いの双対問題となるように数値を与えておいた。上記の（A）と（B）の関係を図で表すと次のようになる。

$$
\begin{array}{c|ccccc|r}
 & x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_n & 1 \\
\hline
y_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
y_2 & a_{21} & a_{22} & \ddots & & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
y_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} & b_m \\
\hline
 & & & & & & \Downarrow \\
 & & & & & & \min \\
1 & c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_n & \Rightarrow \max
\end{array}
$$

原問題と双対問題の解には次の双対定理で述べるように美しい関係が成立する。

双対定理： 原問題と双対問題において、実行可能解が存在すると仮定する。その時、この 2 つの問題の最適解は一致する。

もう少し詳しく述べる。「上記の問題（A）の条件を満たす x が存在し、かつ、問題（B）の条件を満たす y が存在する時、問題（A）の最大値と問題（B）の最小値が一致する」というのが、この双対定理の主張である。

例 1（続き）と例 2（続き）のところで指摘したように、最大値と最小値は一致し$159\frac{3}{13}$であった。

注意： 次のように等式制約は 2 つの不等式制約で表すことができる。

$$
\begin{gathered}
a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\
\Updownarrow \\
\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \le b \\ -a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \le -b \end{cases}
\end{gathered}
$$

負の値も取りうる**自由変数**は 2 つの非負変数の差として表すことができる。

$$
\begin{aligned}
t &= t_+ - t_- \\
t_+ &:= \max\{t, 0\} \\
t_- &:= \max\{-t, 0\}
\end{aligned}
$$

問 1-6 : 問 1-5 の双対問題を作り、それを解き、双対定理を確かめよ。(=>解答)

問 1-7 : 次の問題の双対問題を作り、それらを解き、双対定理を確かめよ。(=>解答)

$$
\begin{aligned}
&\max\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 12 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \le 10 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

問 1-1 の問題を例にとり、原問題と双対問題の意味を考察する。まず、現問題は

$$
\begin{aligned}
&\max\ 200x_1 + 250x_2 + 300x_3 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} 300x_1 + 300x_2 + 250x_3 \le 2000 \\ 15x_1 + 40x_2 + 30x_3 \le 200 \\ 20x_1 + 30x_2 + 30x_3 \le 400 \\ 50x_2 + 150x_3 \le 400 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

であった。この双対問題は

$$\min\ 2000y_1 + 200y_2 + 400y_3 + 400y_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 300y_1 + 15y_2 + 20y_3 \geq 200 \\ 300y_1 + 40y_2 + 30y_3 + 50y_4 \geq 250 \\ 250y_1 + 30y_2 + 30y_3 + 150y_4 \geq 300 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

である。

原問題では友達 4 人（この 4 人をまとめて A と呼ぶ）が自分たちの持っている小麦粉2,000g、バター200g、砂糖400g、レーズン400gという原料を利用してパンを作り、それでなるべく多く儲けようという問題であった。さて、この A とは別の人（B と呼ぶ）が、A からなるべく安くこれら、小麦、バター、砂糖、レーズンの原料を買うことを考えよう。小麦、バター、砂糖、レーズンの各々の価格を y_1, y_2, y_3, y_4 とする。原料の総価格は $2000y_1 + 200y_2 + 400y_3 + 400y_4$ である。B はこれをなるべく小さくしたい。普通のパンは 1 斤あたり 200 円で売れ、小麦300g、バター15g、砂糖20g、レーズン0gで普通のパン 1 斤できるのであるから、A が B に売ろうとする気になるには、$300y_1 + 15y_2 + 20y_3 + 0y_4 \geq 200$ となる必要がある。高級パンとレーズンパンに関しても同様である。このように、双対問題は、A が B に原料を売るという条件を満たしつつ、B がなるべく安く原料を買う問題と解釈できる。

線形計画法の応用

この章では、線形計画法の応用として、輸送問題、割当問題、最大流量問題を取り上げる。

輸送問題

例 1： ある会社が 4 つの倉庫を持っており、その倉庫に保管してある製品を販売場所である 5 つの地域へ輸送しなければならない。各倉庫に保管してある製品の量、各地域で必要としている製品の量、各倉庫から各地域への製品の（単位あたりの）輸送費用が次のようのように与えられている。総輸送費用を最小にするにはどのように輸送すればよいか？

費用	地域 1	地域 2	地域 3	地域 4	地域 5	供給量
倉庫 1	20	10	8	33	7	200
倉庫 2	25	9	6	37	7	350
倉庫 3	9	15	10	20	5	190
倉庫 4	18	14	12	35	8	250
需要量	250	180	100	200	150	

倉庫 i から地域 j へ輸送する製品の量を x_{ij} と仮定すると、

$$
\min \quad
\begin{aligned}
&20x_{11}+10x_{12}+8x_{13}+33x_{14}+7x_{15}\\
&+25x_{21}+9x_{22}+6x_{23}+37x_{24}+7x_{25}\\
&+9x_{31}+15x_{32}+10x_{33}+20x_{34}+5x_{35}\\
&+18x_{41}+14x_{42}+12x_{43}+35x_{44}+8x_{45}
\end{aligned}
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}\le 200\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}\le 350\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}\le 190\\
x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}\le 250\\
x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=250\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=180\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=100\\
x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=200\\
x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=150\\
x_{11},\dots,x_{45}\ge 0
\end{cases}
$$

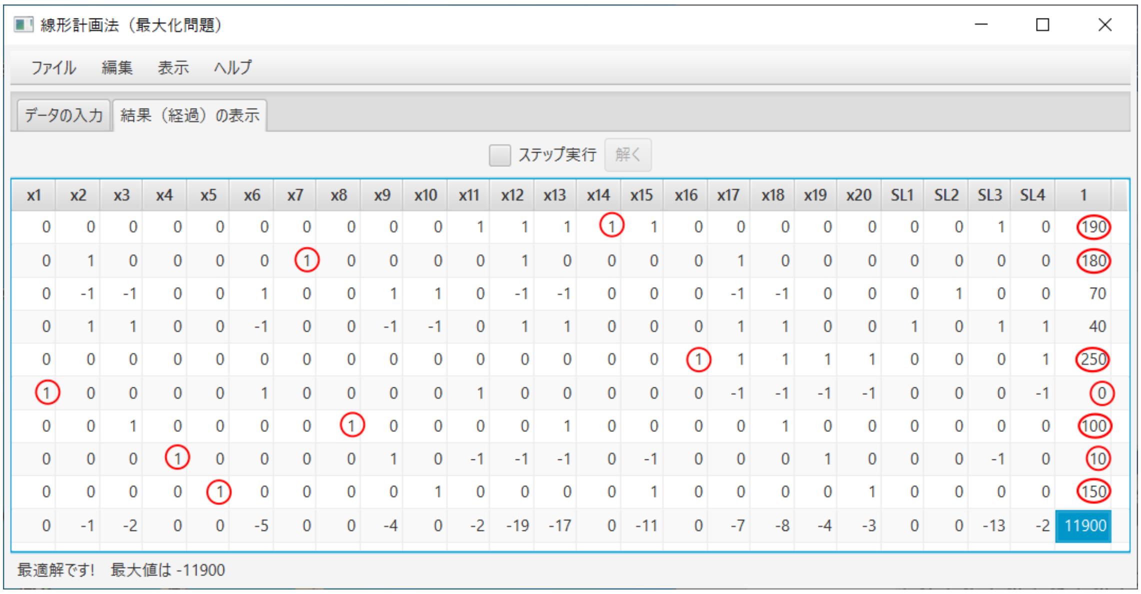
と線形計画問題となる。

線形計画法（LinearProgrammingFX.exe）を起動し、データを入力する。ただ

し、変数 x_{ij} を $x_{5(i-1)+j}$ と読み替える。

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20		1
非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数		
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	200
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	350
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	<=	190
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	<=	250
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	=	250
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	=	180
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	=	100
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	=	200
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	=	150
-20	-10	-8	-33	-7	-25	-9	-6	-37	-7	-9	-15	-10	-20	-5	-18	-14	-12	-35	-8	<----	目的関数

「ステップ実行」のチェックをはずして「解く」ボタンを押すと、



x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20	SL1	SL2	SL3	SL4	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	190
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	180
0	-1	-1	0	0	1	0	0	1	1	0	-1	-1	0	0	0	-1	-1	0	0	0	1	0	0	70
0	1	1	0	0	-1	0	0	-1	-1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	40
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	250
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	-1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	100
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	-1	-1	-1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	10
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	150
0	-1	-2	0	0	-5	0	0	-4	0	-2	-19	-17	0	-11	0	-7	-8	-4	-3	0	0	-13	-2	11900

となり、元の変数に読み戻すと、$x_{11}=x_{12}=x_{13}=0, x_{14}=10, x_{15}=150,$ $x_{21}=0, x_{22}=180, x_{23}=100, x_{24}=x_{25}=0,$ $x_{31}=x_{32}=x_{33}=0, x_{34}=190, x_{35}=0,$ $x_{41}=250, x_{42}=x_{43}=x_{44}=x_{45}=0$ の時、最小値 $11{,}900$ となる。もう少し分かりやすい形式で書くと、次のようになる。

費用	地域 1	地域 2	地域 3	地域 4	地域 5	供給量
倉庫 1				10	150	200
倉庫 2		180	100			350
倉庫 3				190		190
倉庫 4	250					250
需要量	250	180	100	200	150	

割当問題

例 2： ある A 社には 4 人の人と 4 つの部屋がある。どの人をどの部屋で仕事をさせるかを、決定する必要がある。各人を各部屋に割当てた場合の利益は次の表のように与えられている。誰をどの部屋に割当てれば最大の利益が得られるか？

	部屋 1	部屋 2	部屋 3	部屋 4
人 1	8	7	2	4
人 2	7	8	9	5
人 3	8	8	9	9
人 4	5	4	4	5

人 i を部屋 j に割当てるならば $x_{ij}=1$、割当てないならば $x_{ij}=0$ となるような変数を導入する。

$$
\max \quad
\begin{aligned}
&8x_{11}+7x_{12}+2x_{13}+4x_{14} \\
&+7x_{21}+8x_{22}+9x_{23}+5x_{24} \\
&+8x_{31}+8x_{32}+9x_{33}+9x_{34} \\
&+5x_{41}+4x_{42}+4x_{43}+5x_{44}
\end{aligned}
$$

$$
\text{s.t.}
\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1 \\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1 \\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1 \\
x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1 \\
x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1 \\
x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1 \\
x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1 \\
x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1 \\
x_{11},\dots,x_{44}\ge 0
\end{cases}
$$

と線形計画問題になる。

　データを入力する。ただし、変数 x_{ij} を $x_{4(i-1)+j}$ と読み替える。

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16		1
非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数		
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	=	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	=	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	=	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	=	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	=	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	=	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	=	1
8	7	2	4	7	8	9	5	8	8	9	9	5	4	4	5	<----	目的関数

「ステップ実行」のチェックをはずして「解く」ボタンを押すと、

となり、$x_{12}=x_{23}=x_{34}=x_{41}=1$、その他の x は 0 の時、最大値 30 を取る。もう少し分かりやすい形式で書くと、次のようになる。

	部屋 1	部屋 2	部屋 3	部屋 4
人 1		1		
人 2			1	
人 3				1
人 4	1			

また、次の割当方法も解である

	部屋 1	部屋 2	部屋 3	部屋 4
人 1	1			
人 2		1		
人 3			1	
人 4				1

すなわち、最大値は同じであるが、それを与える x は一意とは限らない。

注意：
この線形計画問題が整数解を持てば、それが割当問題の解となる。実際、この整数計画問題は整数解を持つので、割当問題が解けたことになる。

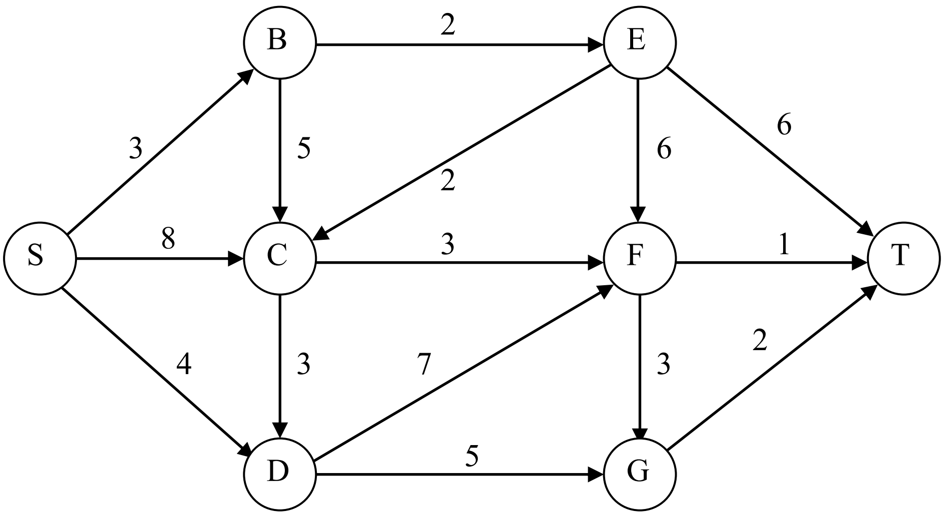
注意：
割当問題において最大値を与える x は整数値をとる必要がある。上記の結果を見ると輸送問題と割当問題において最適値を与える x の値は整数値となっている。これは偶然ではない。すなわち、b が整数値であり制約式における x の係数が特

殊な形（行和と列和が1である）をしているので、最適値を与える x の値は整数値となる。

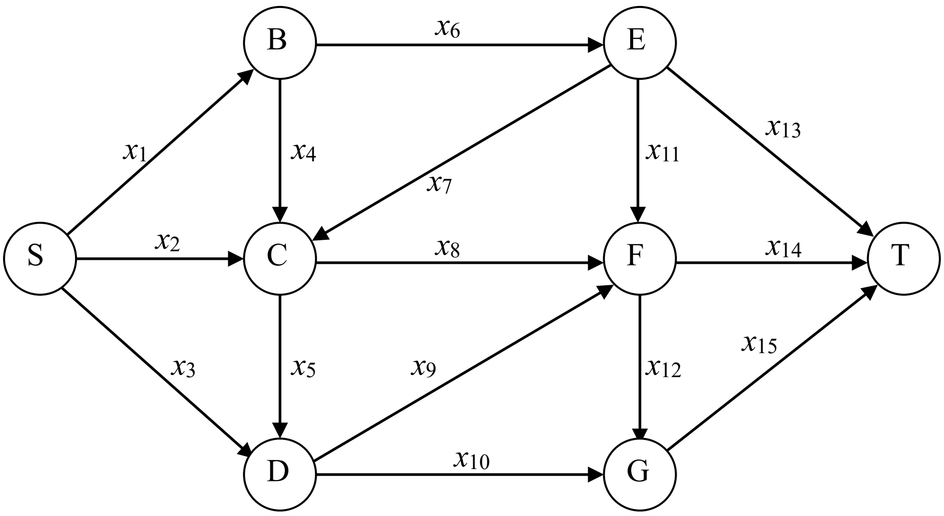
割当問題の双対問題とその解釈に関しては<u>ここ</u>を参照。

最大流量問題

例 3： 次の図のネットワークにおいて矢印方向に、枝に書かれた容量まで、液体を流すことができる。節 S から節 T まで最大量の液体を流すには各枝にどれだけの量を流せばよいか？



各枝に流す流量を次の図のようにする。



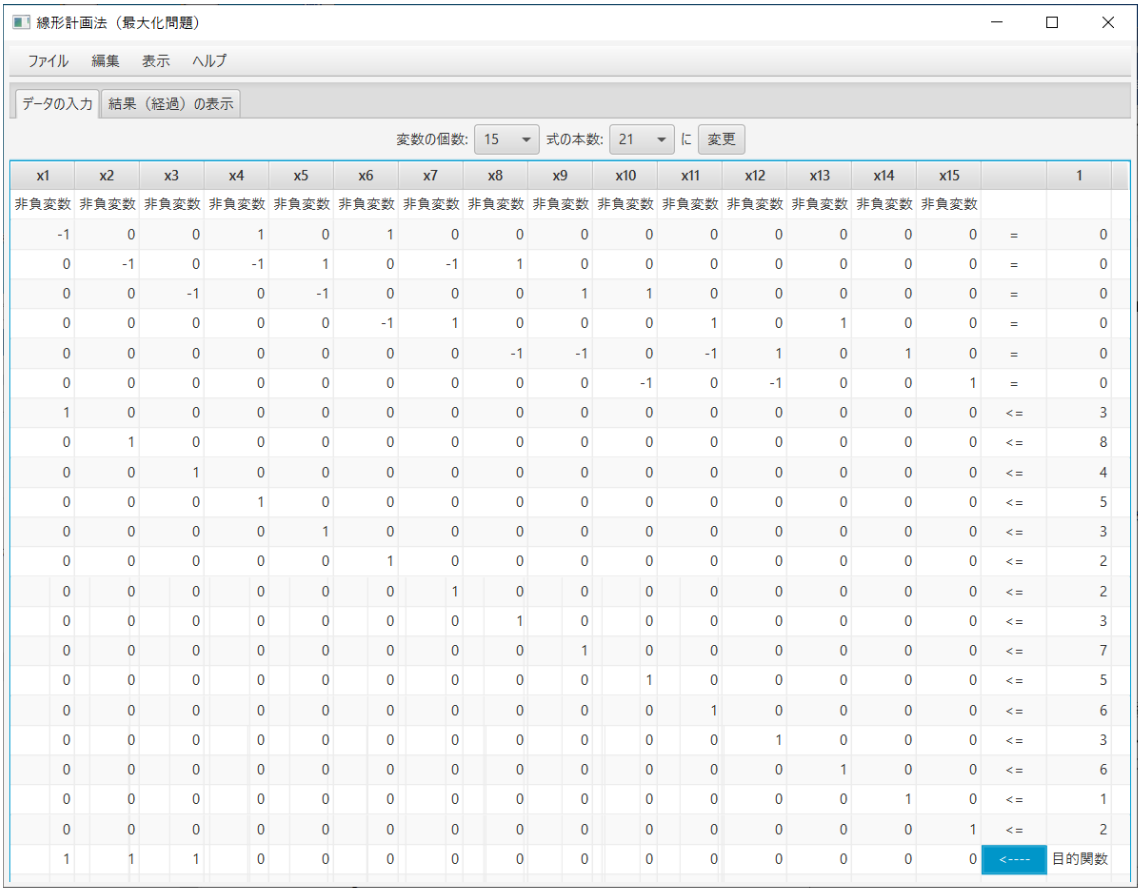
そうすると、次のような線形計画問題となる。

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_4 + x_6 = 0 \\ -x_2 - x_4 - x_7 + x_5 + x_8 = 0 \\ -x_3 - x_5 + x_9 + x_{10} = 0 \\ -x_6 + x_7 + x_{11} + x_{13} = 0 \\ -x_8 - x_9 - x_{11} + x_{12} + x_{14} = 0 \\ -x_{10} - x_{12} + x_{15} = 0 \\ x_1 \le 3, x_2 \le 8, x_3 \le 4, x_4 \le 5, x_5 \le 3 \\ x_6 \le 2, x_7 \le 2, x_8 \le 3, x_9 \le 7, x_{10} \le 5 \\ x_{11} \le 6, x_{12} \le 3, x_{13} \le 6, x_{14} \le 1, x_{15} \le 2 \\ x_1, \ldots, x_{15} \ge 0 \end{cases}$$

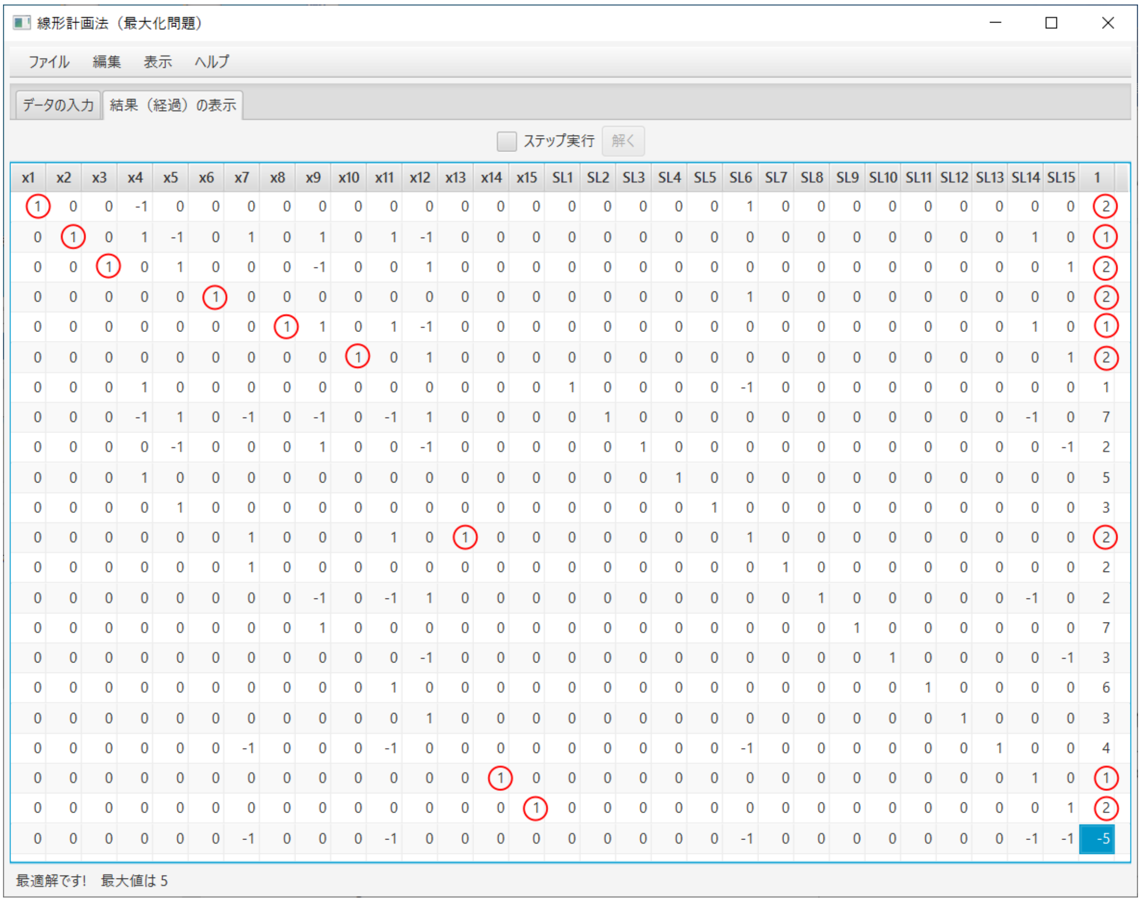
ここで、最初の 6 個の等式は、各々、節 B、C、D、E、F、G における、流量の保存則（その節に入る流量と出る流量は等しい）であり、次の 15 個の不等式は、各枝の流量はその枝の容量を超えないことを表す。

データを入力し



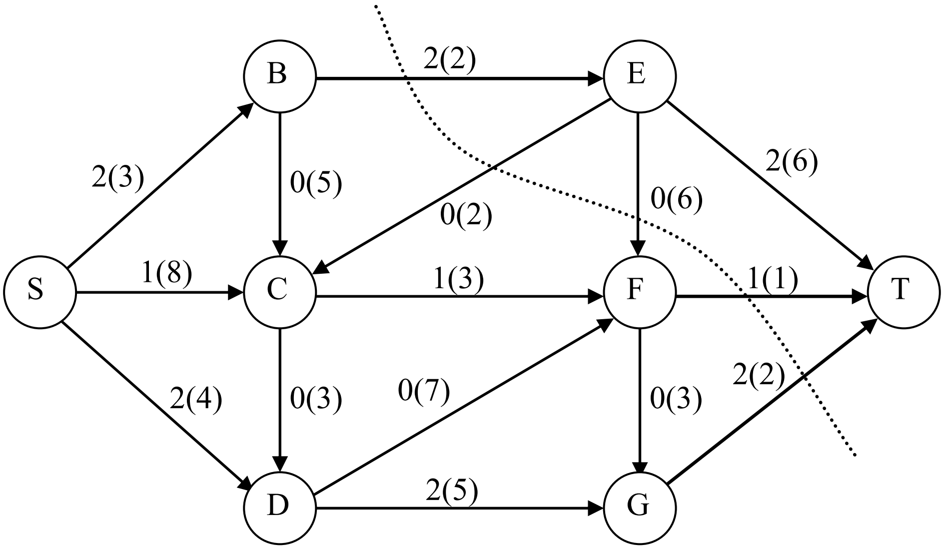
x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15		1
非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数	非負変数		
-1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	0
0	-1	0	-1	1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	=	0
0	0	-1	0	-1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	=	0
0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	=	0
0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	-1	1	0	1	0	=	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	1	=	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	3
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	8
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	4
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	5
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	3
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	2
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	2
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	<=	3
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	<=	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	<=	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	<=	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	<=	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	<=	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	<=	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	<=	2
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<----	目的関数

「ステップ実行」のチェックをはずして「解く」ボタンを押すと、



x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	SL1	SL2	SL3	SL4	SL5	SL6	SL7	SL8	SL9	SL10	SL11	SL12	SL13	SL14	SL15	1
1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
0	1	0	1	-1	0	1	0	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	-1	1	0	-1	0	-1	0	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	7
0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	2
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-5

となり、$x_1=2, x_2=1, x_3=2, x_6=2, x_8=1, x_9=2, x_{13}=2, x_{14}=1, x_{15}=2$、その他の $x=0$ の時、最大値5をとる。分かりやすい形式で書くと



となる。カッコ内はその枝の容量である。最大流量問題の双対問題とその解釈に関してはここを参照。図において、節の集合の分割$(\{S,B,C,D,F,G\},\{E,T\})$が最小カットであり、その容量は$2+1+2=5$であり、上で求めた最大流量5と一致する。

ゲーム理論（Game Theory）

ここでは複数の意思決定者が自分の利益を追求する時、どのような状況が出現するかを考察する、ゲーム理論の基礎的な事項を扱う。まず、あらゆる結果においてプレイヤーの得る利得の和が 0 である 2 人ゼロ和ゲーム、その後、非ゼロ和ゲームを扱う。

2 人ゼロ和ゲーム

あらゆる結果においてプレイヤーの得る利得の和が 0 である 2 人ゲームが 2 人ゼロ和ゲームである。これは利害がまったく正反対の 2 人の意思決定者が存在する場合の意思決定問題である。

例 1： 1 と 2 の 2 人のプレイヤー[6]が次の表で与えられた状況に面している。2 人はどの行為を取るできであろうか？

		プレイヤー2 の戦略		
		1	2	3
プレイヤー1 の戦略	1	5	5	7
	2	7	4	5

プレイヤー1 は 1 と 2 のどちらかの行為（**戦略**と呼ぶ）を選ぶことができる。同様にプレイヤー2 は 1 と 2 と 3 のどれかの戦略を選ぶことができる。両方のプレイヤーが自分の戦略を決定した時、プレイヤー1 の取った戦略のある行とプレイヤー2 のとった戦略のある列が交差したところにある数値（**利得**と呼ぶ）をプレイヤー2 がプレイヤー1 へ与える。例えば、プレイヤー1 が戦略 2 を取り、プレイヤー2 が戦略 2 を取れば、プレイヤー2 がプレイヤー1 へ 4 の利得を与える。プレイヤー1 は行を選び、プレイヤー2 は列を選ぶとみなせるので、プレイヤー1 を**行プレイヤー**、プレイヤー2 を**列プレイヤー**と呼ぶこともある。

プレイヤー1 は貰う利得がより多い方を望み、逆に、プレイヤー2 は支払う利得がより小さいほうを望む。この観点から、プレイヤー1 を**最大化プレイヤー**、プレイヤー2 を**最小化プレイヤー**と呼ぶこともある。

さて、どのような結果を 2 人のプレイヤーは妥当と思うだろうか？

例えば、プレイヤー1 が戦略 2 を取り、プレイヤー2 が戦略 3 を取り、利得 5 をプレイヤー2 がプレイヤー1 へ支払う結果を想定してみよう。この結果は起こるであろうか？プレイヤー1 はプレイヤー2 が戦略 3 を取るならば、戦略 2 を取って利得 5 を得るよりも、戦略 1 と取った方が貰う利得が 5 から 7 に増えるから、戦略 2 を取ることはないであろう。（プレイヤー2 はプレイヤー1 が戦略 2 を取るならば、戦略 3 を取って利得 5 を支払うよりも、戦略 2 を取ったほうが支払う利得が 5 から 4 に減るから、戦略 3 を取ることはないであろう。）従って、この結果が起こると考えるのは妥当ではない。

---

[6] ゲーム理論では意思決定をする参加者を**プレイヤー**と呼ぶことが多い。

また、例えば、プレイヤー1 が戦略 1 を取り、プレイヤー2 が戦略 1 を取り、利得 5 をプレイヤー2 がプレイヤー1 へ支払う結果を想定してみよう。この結果は起こるであろうか？プレイヤー1 はプレイヤー2 が戦略 1 を取るならば、戦略 1 を取って利得 5 を得るよりも、戦略 2 と取った方が貰う利得が 5 から 7 に増えるから、戦略 1 を取ることはないであろう。
では、プレイヤー1 が戦略 1 をプレイヤー2 が戦略 2 を取り、利得 5 をプレイヤー2 がプレイヤー1 へ支払う結果を想定してみよう。この結果は起こるであろうか？プレイヤー1 はプレイヤー2 が戦略 2 を取るならば、自分の戦略を 1 から 2 へ変更しても貰える利得は増えないから、変更する動機を持たない。同様に、プレイヤー2 はプレイヤー1 が戦略 1 を取るならば、自分の戦略を 2 からそれ以外へ変更しても支払う利得は減らないから、変更する動機を持たない。従って、プレイヤー1 が戦略 1 を取り、プレイヤー2 が戦略 2 を取り、利得 5 をプレイヤー2 から 1 へ支払う結果が起こると考えるのは妥当である。(=>他の戦略の組み合わせに関しても同様にチェックせよ。)

以上のことを、次のように表現する。
プレイヤー1 とプレイヤー2 の戦略の組み合わせ$(1,2)$は**鞍点**をなし、**ゲームの値**は 5 である。

鞍点とゲームの値は、次のようにして求める。まず、利得の部分だけに注意し、

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

列方向（上下方向）で最大であり、かつ、行方向（左右方向）で最小である要素を探す。この例の場合：1 列目の最大値 7 は行方向の最小値ではない。2 列目の最大値 5 は行方向の最小値である。3 列目の最大値 7 は行方向の最小値ではない。以上で、列方向で最大値で行方向で最小値である要素が見つかった。それは

1 行目 2 列目の要素 5

である。これより鞍点は$(1,2)$、ゲームの値は 5 となる。

別の観点から上記の問題を考えてみる。各プレイヤーは自分の最悪を最善にするという行動基準[7]に従うと仮定しよう。プレイヤー1 の戦略 1 における最悪（最小値）は 5 である（下の表を参照）。戦略 2 における最悪（最小値）は 4 である。プレイヤー1 の最悪を最善にするには 5 と 4 の最大値 5 を狙い、戦略 1 を取ればよい。プレイヤー2 の戦略 1 の最悪（最大値）は 7 である。プレイヤー2

[7] 一般的に、このような行動基準はミニマックス基準と呼ばれる。正確に述べると、最大化プレイヤーであるプレイヤー1 はマクシミン（maximin）基準に従い、最小化プレイヤーであるプレイヤー2 はミニマックス（minimax）基準に従う。この名付け方における max と min の順序に関しては、後述の定義を参照すること。

の戦略 2 の最悪（最大値）は 5 である。プレイヤー2 の戦略 3 の最悪（最大値）は 7 である。プレイヤー2 の最悪を最善にするには 7 と 5 と 7 の最小値 5 を狙い、戦略 2 を取ればよい。プレイヤー1 の最悪を最善にする値 5 とプレイヤー2 の最悪を最善にする値 5 が**一致する**ので、最悪を最善にするという両者の思惑は次の結果で実現する。

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>プレイヤー1 にとって最悪（最小値）</td><td>プレイヤー1 にとっての最悪を最善に（最大値）</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>5</td><td>7</td><td>5</td><td rowspan="2">マクシミン戦略は 1 でマクシミン値は 5</td></tr>
<tr><td></td><td>7</td><td>4</td><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>プレイヤー2 にとって最悪（最大値）</td><td>7</td><td>5</td><td>7</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>プレイヤー2 にとっての最悪を最善に（最小値）</td><td colspan="3">ミニマックス戦略は 2 でミニマックス値は 5</td><td></td><td>上の 5 と左の 5 が一致</td></tr>
</table>

プレイヤー1 が戦略 1 を取り、プレイヤー2 が戦略 2 を取り、プレイヤー2 がプレイヤー1 に利得 5 を支払う。

以上のことを、次のように表現する。

プレイヤー1 の**最適戦略**は戦略 1 であり、プレイヤー2 の**最適戦略**は戦略 2 であり、**ゲームの値**は 5 である。

一般的に、プレイヤー1 が m 個の戦略を持ち、プレイヤー2 が n 個の戦略を持つ、2 人ゼロ和ゲーム（**行列ゲーム**とも呼ばれる）を次の行列 A で表す。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

もし、$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j} \ (i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n)$ が成り立つ i^* と j^* が存在すれば、**鞍点**は (i^*, j^*) であり、**ゲームの値**（$v(A)$ で表す）は $v(A) = a_{i^*j^*}$ となる。

$\max_{i=1,\ldots,m} \min_{j=1,\ldots,n} a_{ij} \le \min_{j=1,\ldots,m} \max_{i=1,\ldots,n} a_{ij}$ が一般に成り立つ。$\min_{j=1,\ldots,n} a_{i^*j} = \max_{i=1,\ldots,m} \min_{j=1,\ldots,n} a_{ij}$ の時、この値を**マクシミン値**と呼び、戦略 i^* はプレイヤー1 の**マクシミン戦略**と呼ぶ。$\max_{i=1,\ldots,m} a_{ij^*} = \min_{j=1,\ldots,m} \max_{i=1,\ldots,n} a_{ij}$ の時、この値を**ミニマックス値**と呼び、戦略 j^* をプレイヤー2 の**ミニマックス戦略**と呼ぶ。

もし、$\max_{i=1,\ldots,m}\min_{j=1,\ldots,n} a_{ij} = \min_{j=1,\ldots,m}\max_{i=1,\ldots,n} a_{ij}$ が成り立てば、マクシミン戦略とミニマックス戦略が各々プレイヤー1 と 2 の最適戦略となり、ゲームの値は $v(A) = \max_{i=1,\ldots,m}\min_{j=1,\ldots,n} a_{ij} = \min_{j=1,\ldots,m}\max_{i=1,\ldots,n} a_{ij} = a_{i^*j^*}$ となる。鞍点が存在することと $\max_{i=1,\ldots,m}\min_{j=1,\ldots,n} a_{ij} = \min_{j=1,\ldots,m}\max_{i=1,\ldots,n} a_{ij}$ とは同値である。また、「鞍点が (i^*, j^*) である」ことと、「プレイヤー1 の最適戦略がマクシミン戦略の i^* であり、プレイヤー2 の最適戦略がミニマックス戦略の j^* である」ことは同値である。

問 3-1： 次の行列ゲームを解け（鞍点があれば、それとゲームの値を求めよ。同じことであるが、各プレイヤーの最適戦略が存在すれば、それらとゲームの値を求めよ）。(=>解答)

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

注意：次のゲームにおいて、プレイヤー1 の最適戦略は戦略 1 と 3、プレイヤー2 の最適戦略は戦略 1 と 2 であり、ゲームの値は 3 である。

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

プレイヤー1 と 2 は自分の最適戦略のどちらを選んでも、結果として、按点が実現し、利得はゲームの値の 3 になる。すなわち、2 人ゼロ和ゲームにおいてはゲームの値を得るために、相手のプレイヤーと調整する必要はなく、自分の最適戦略（のどれか）をとれば、結果として、ゲームの値が得られる。後述する非協力ゲームではこのように簡単にはいかない。

例 2： プレイヤー1 とプレイヤー2 は 2 つの数字 1 と 2 のどちらかを宣言できる。2 人が 1 を宣言すると、プレイヤー1 の勝ちで、プレイヤー2 はプレイヤー1 に 3 の利得を支払う。2 人が 2 を宣言すると、プレイヤー1 の勝ちで、プレイヤー2 はプレイヤー1 に 2 の利得を支払う。2 人が異なる数字を宣言すると、プレイヤー2 の勝ちで、プレイヤー1 がプレイヤー2 にプレイヤー2 の宣言した値を利得として支払う。

		プレイヤー2 の戦略	
		1	2
プレイヤー1 の戦略	1	3	−2
	2	−1	2

列方向で最大で、行方向で最小である要素はないので、鞍点は存在しない。また、次の表のように $\max_{i=1,\dots,m} \min_{j=1,\dots,n} a_{ij} < \min_{j=1,\dots,m} \max_{i=1,\dots,n} a_{ij}$ となって、最悪を最善にするという 2 人のプレイヤーの思惑は一致しない。例えば、プレイヤー1 がマクシミン戦略の 2 を取り、プレイヤー2 がミニマックス戦略の 2 を取るとする。結果の利得は 1 となる。これはプレイヤー1 の最悪の最善の値である –1 よりも大きいので、プレイヤー2 は戦略を 1 へ変更する動機を持つ。もし、プレイヤー2 が戦略 1 へ変更すると、結果の利得は –1 となる。この利得はプレイヤー2 の最悪の最善の値である 1 よりも小さいので、プレイヤー 1 は戦略を 1 へ変更する動機を持つ。・・・このように 2 人の最悪を最善にする値が一致しない場合は安定した結果に到達することがない。

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>プレイヤー1にとって最悪（最小値）</td><td>プレイヤー1にとっての最悪を最善に（最大値）</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>–2</td><td>–2</td><td rowspan="2">マクシミン戦略は 2 でマクシミン値は –1</td></tr>
<tr><td></td><td>–1</td><td>1</td><td>–1</td></tr>
<tr><td>プレイヤー2にとって最悪（最大値）</td><td>3</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>プレイヤー2にとっての最悪を最善に（最小値）</td><td colspan="2">ミニマックス戦略は 2 でミニマックス値は 1</td><td></td><td>上の –1 と左の 1 が一致しない。$-1<1$ である。</td></tr>
</table>

この不備に対処するために、戦略の集合を、各戦略を取る確率を導入することにより、拡張する。今までの戦略を**純粋戦略**と呼び、拡張した戦略を**混合戦略**と呼ぶことにする。

プレイヤー1 の混合戦略を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1; x_1, \dots, x_m \ge 0 \right)$、プレイヤー2 の混合戦略を $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \left(y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1; y_1, \dots, y_n \ge 0 \right)$ で表す。ここで、x_i はプレイヤー1 が純粋戦略 i を取る確率であり、y_j はプレイヤー2 が純粋戦略 j を取る確率である。プレイヤー1 が混合戦略 $\boldsymbol{x}$ を利用し、プレイヤー2 が混合戦略 $\boldsymbol{y}$ を利用した時にプレイヤー2 からプレイヤー1 へ支払われる利得の期待値を $h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ とおくと、

$$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i y_j=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{y}$$

となる。戦略の集合を混合戦略まで拡張し、混合戦略における利得をこの期待値とすると、最適戦略とゲームの値が存在することが知られている。すなわち、

定理： $\max_{\boldsymbol{x}}\min_{\boldsymbol{y}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\min_{\boldsymbol{y}}\max_{\boldsymbol{x}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成立する。$\min_{\boldsymbol{y}}h(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y})=\max_{\boldsymbol{x}}\min_{\boldsymbol{y}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 、$\max_{\boldsymbol{x}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*)=\min_{\boldsymbol{y}}\max_{\boldsymbol{x}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ とおけば、 $\boldsymbol{x}^*$ はプレイヤー1 の最適戦略、 $\boldsymbol{y}^*$ はプレイヤー2 の最適戦略で、ゲームの値（ $v(A)$ と書く）は $v(A)=\max_{\boldsymbol{x}}\min_{\boldsymbol{y}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\min_{\boldsymbol{y}}\max_{\boldsymbol{x}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=h(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ で与えられる。

有用な性質として、次のことが成り立つ。ただし、$\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}_j$ は、各々、プレイヤー1 の純粋戦略 i とプレイヤー2 の純粋戦略 j を表す。

$$\max_{\boldsymbol{x}}\min_{\boldsymbol{y}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\max_{\boldsymbol{x}}\min_{j}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_j)$$
$$\min_{\boldsymbol{y}}\max_{\boldsymbol{x}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\min_{\boldsymbol{y}}\max_{i}h(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{y})$$

これを利用して、$v(A)=\max_{\boldsymbol{x}}\min_{\boldsymbol{y}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\min_{\boldsymbol{y}}\max_{\boldsymbol{x}}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は次のように表現される。

$$\begin{aligned}&v(A):=\max\ v\\ &\text{s.t.}\begin{cases}h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_j)\ge v\ (j=1,\ldots,n)\\ x_1+x_2+\cdots+x_m=1\\ x_1,x_2,\ldots,x_m\ge 0\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&v(A):=\min\ u\\ &\text{s.t.}\begin{cases}h(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{y})\le u\ (i=1,\ldots,m)\\ y_1+y_2+\cdots+y_n=1\\ y_1,y_2,\ldots,y_n\ge 0\end{cases}\end{aligned}$$

これら 2 つの線形計画問題は互いの双対問題になっている。

問 3-2： $m=3,n=2$ の時、上記の 2 つの線形計画問題が互いの双対問題になっていることをチェックせよ。(=>解答)

また、ゲームの値が求まっている場合、

$v(A)=\max_{\boldsymbol{x}}\min_{\boldsymbol{y}} h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\min_{\boldsymbol{y}}\max_{\boldsymbol{x}} h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=h(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ は次のように表現される。

$$h(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{e}_j)\geq v(A)\ \left(j=1,\ldots,n\right)$$
$$h(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{y}^*)\leq v(A)\ \left(i=1,\ldots,m\right)$$

特に、

$$h(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{e}_j)>v(A)\Rightarrow y_j^*=0$$
$$h(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{y}^*)<v(A)\Rightarrow x_i^*=0$$

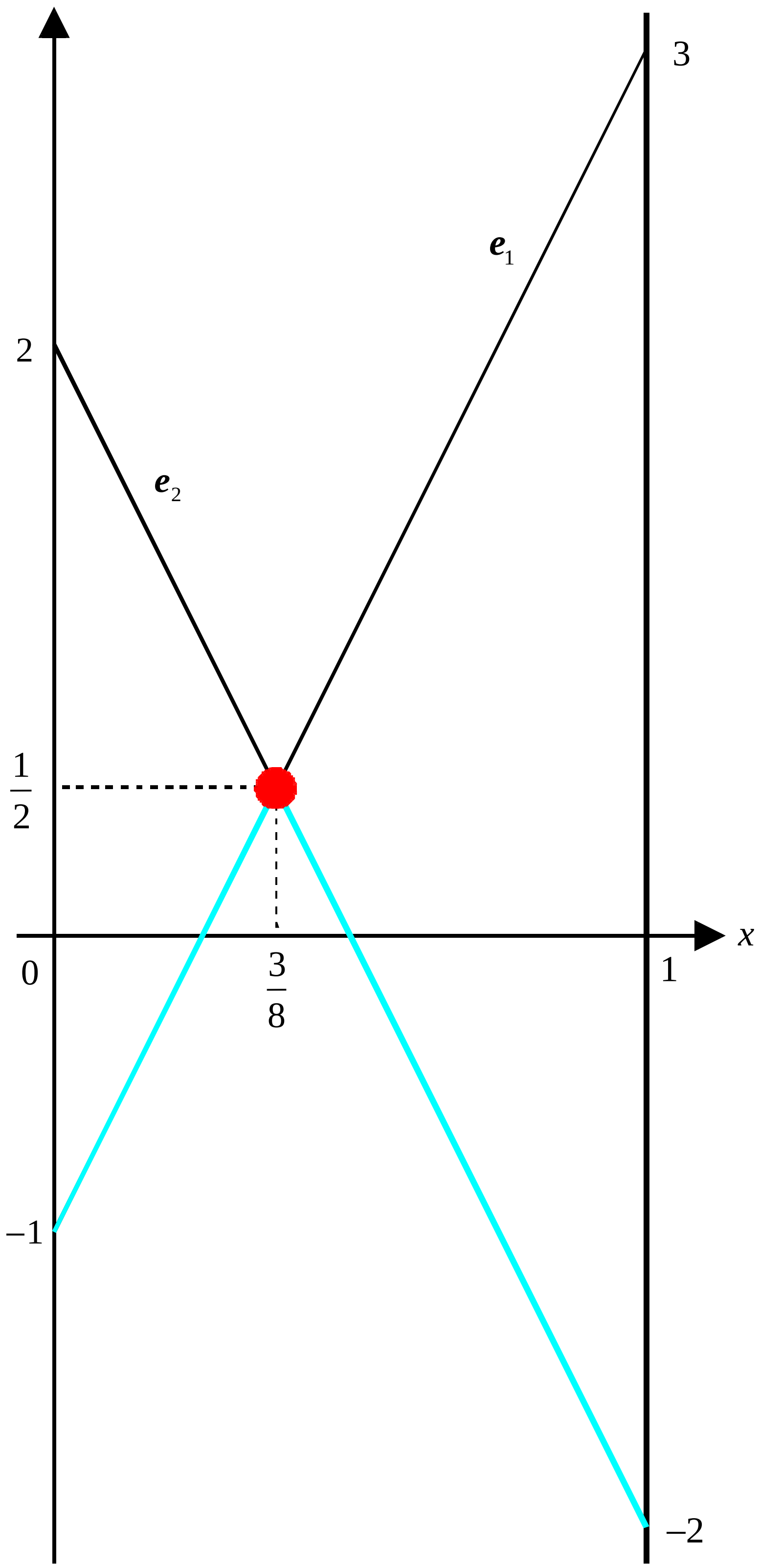
$$x_i^*>0\Rightarrow h(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{y}^*)=v(A)$$
$$y_j^*>0\Rightarrow h(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{e}_j)=v(A)$$

が成り立つ。

さて、例 2 の最適戦略とゲームの値は（純粋戦略の個数が 2 個のプレイヤーが存在するので）図を利用して求めることができる。プレイヤー1 の戦略 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$ を x で、プレイヤー2 の戦略 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}$ を y で表すことにすると、

$$\begin{aligned} h(x,\boldsymbol{e}_1)&=3x-(1-x)=4x-1 \\ h(x,\boldsymbol{e}_2)&=-2x+2(1-x)=-4x+2 \\ v(A)&=\max_x\left\{\min\left\{h(x,\boldsymbol{e}_1),h(x,\boldsymbol{e}_2)\right\}\right\} \\ &=\max_x\left\{\min\left\{4x-1,-4x+2\right\}\right\} \end{aligned}$$

下図より、プレイヤー1 の最適戦略は $x^*=\dfrac{3}{8}$、すなわち、混合戦略 $\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$ であり、ゲームの値は $\dfrac{1}{2}$ である。



上図において、赤丸の横座標は

$$4x-1=-4x+2$$
$$8x=3$$
$$x=\frac{3}{8}$$
縦座標（ゲームの値）は
$$v(A)=4\times\frac{3}{8}-1=\frac{1}{2}$$
となる。

次に、プレイヤー2 の最適戦略を求める。プレイヤー1 は最適戦略においてどちらの純粋戦略、すなわち、戦略 1 も戦略 2 も正の確率で取るので、

$$h(\boldsymbol{e}_1,y)=3y-2(1-y)=5y-2=v(A)=\frac{1}{2}$$
$$h(\boldsymbol{e}_2,y)=-y+2(1-y)=-3y+2=v(A)=\frac{1}{2}$$

これを解くと、$y^*=\frac{1}{2}$ となる。従って、プレイヤー2 の最適戦略は混合戦略$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$となる。

行列ゲーム$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$ではどちらのプレイヤーの戦略の個数も 2 個よりも多いので、図を利用して解けないように見えるが、このゲームの場合はそうではない。プレイヤー1 の戦略 1 と戦略 2 を比較する：プレイヤー2 がどの戦略を取ったとしても、プレイヤー1 にとって戦略 2 を取るよりも戦略 1 を取ったほうが得であるので、プレイヤー1 は戦略 2 を利用しない。すなわち、行列ゲーム$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$を解けばよいことになる。プレイヤー1 の戦略の個数が 2 個になったので、図を利用して解くことができる。

問 3-3： 次の行列ゲームを解け。(=>解答)

(1) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}$

例 3（じゃんけん）： 次のゲームの最適戦略とゲームの値を求める。ただし、「石」を戦略 1、「ハサミ」を戦略 2、「紙」を戦略 3 とする。

		プレイヤー2 の戦略		
		1	2	3
プレイヤー1 の戦略	1	0	1	–1
	2	–1	0	1
	3	1	–1	0

両方のプレイヤーの戦略の個数が 3 以上の場合は、線形計画法を利用して、最適戦略とゲームの値を求めることができる。ゲームの値とプレイヤー1 の混合戦略を求めるために、次の（プレイヤー1 の）線形計画問題を解く。

$$\max v$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \quad\quad -x_2 \quad +x_3 \quad \geq v \\ x_1 \quad\quad\quad\quad -x_3 \quad \geq v \\ -x_1 \quad +x_2 \quad\quad\quad \geq v \\ x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad = 1 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

この問題をシンプレックス法で解く。

シンプレックス表は以下の通りである。ピボットはウィンドウの最下行に示されている。

x1	x2	x3	(x4+)	(x4-)	SU1	SU2	SU3	1
0	1	-1	1	-1	1	0	0	0
0	1	2	1	-1	0	1	0	1
0	-2	-1	1	-1	0	0	1	-1
1	1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	-1	0	0	0	0

x1	x2	x3	(x4+)	(x4-)	SU1	SU2	SU3	1
0	0	-1-1/2	1+1/2	-1-1/2	1	0	1/2	-1/2
0	0	1+1/2	1+1/2	-1-1/2	0	1	1/2	1/2
0	1	1/2	-1/2	1/2	0	0	-1/2	1/2
1	0	1/2	1/2	-1/2	0	0	1/2	1/2
0	0	0	1	-1	0	0	0	0

x1	x2	x3	(x4+)	(x4-)	SU1	SU2	SU3	1
0	0	1	-1	1	-2/3	0	-1/3	1/3
0	0	0	3	-3	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1/3	0	-1/3	1/3
1	0	0	1	-1	1/3	0	2/3	1/3
0	0	0	1	-1	0	0	0	0

x1	x2	x3	(x4+)	(x4-)	SU1	SU2	SU3	1
0	0	1	0	0	-1/3	1/3	0	1/3
0	0	0	1	-1	1/3	1/3	1/3	0
0	1	0	0	0	1/3	0	-1/3	1/3
1	0	0	0	0	0	-1/3	1/3	1/3
0	0	0	0	0	-1/3	-1/3	-1/3	0

となり、$x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{3}$ の時、最大値 0 をとる。プレイヤー1 の線形計画問題の双対問題を作るために、まず、

$$\min -v$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \quad\ \ -x_2 \ +x_3 \ -v \ \geq 0 \\ x_1 \qquad\quad\ -x_3 \ -v \ \geq 0 \\ -x_1 \ +x_2 \qquad\quad -v \ \geq 0 \\ x_1 \ +x_2 \ +x_3 \qquad\ = 1 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

と変形する。この双対問題を作ると、

$$\max z$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \qquad\ y_2 \ -y_3 \ +z \ \leq 0 \\ -y_1 \qquad\ +y_3 \ +z \ \leq 0 \\ y_1 \ -y_2 \qquad\quad +z \ \leq 0 \\ -y_1 \ -y_2 \ -y_3 \qquad = -1 \\ \qquad y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$z = -u$ とおき、変形すると

$$
\min u
$$
$$
\text{s.t.}\begin{cases}
\quad\quad y_2 - y_3 \le u \\
-y_1 \quad\quad + y_3 \le u \\
y_1 - y_2 \quad\quad \le u \\
y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\
y_1, y_2, y_3 \ge 0
\end{cases}
$$

これはプレイヤー2 の線形計画問題である。上記の（シンプレックス）表より $y_1 = y_2 = y_3 = \frac{1}{3}$ の時[8]、最小値 0 をとることが分かる。

以上をまとめると、プレイヤー1 と 2 の最適戦略は同じで混合戦略 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ であり、ゲームの値は 0 である。

2 人非ゼロ和ゲーム

2 人の利得の和が必ずしもゼロとはならない場合を考察する。2 人ゼロ和ゲームでは鞍点が存在することと、マクシミン値とミニマックス値が一致し、最適戦略が存在することが同値であった。また、複数個の按点が存在しても、ゲームの値は一意であるため、どの按点で決着が付いても、問題はなかった。しかし、次の例が示すように、非ゼロ和ゲームではそうではない。

例 4（非ゼロ和ゲーム）: 下の表において、コンマの左の数値はプレイヤー1 が貰う利得であり、コンマの右の数値はプレイヤー2 が貰う利得である。鞍点を求める考え方を拡張して、コンマの左の数字は列（上下）方向に最大値を探し、その値に下線を引く。コンマの右の数字は行（左右）方向に最大値を探し、その値に下線を引く。コンマの左と右の両方の数値に下線が引かれたものが存在すれば、その戦略の組み合わせが鞍点の拡張概念である**ナッシュ均衡**となる。下の表で求めると、ナッシュ均衡は 2 つあり (T,R) と (B,L) である。そのときの利得は、各々、$(3,4)$ と $(4,3)$ である。プレイヤー1 と 2 のマクシミン戦略は、各々、T と L である。しかし、その組み合わせ (T,L) はナッシュ均衡ではない。

[8] 水色の円で囲まれた部分が、双対問題の変数 y の取る値である。ただし、符号を変える。

		プレイヤー2 の戦略			
		L	R		マクシミン値
プレイヤー1 の戦略	T	1,1	$\underline{3}, \underline{4}$	1	1
	B	$\underline{4}, \underline{3}$	0,0	0	
		1	0		
マクシミン値		1			

このように非ゼロ和ゲームの場合、ナッシュ均衡が複数存在し、プレイヤーが受け取る利得が異なる場合があり、また、マクシミン戦略の組み合わせはナッシュ均衡とはならない。最悪を最善にするという考え方は両者の利害が全く対立するゼロ和ゲーム状況では役立ったが、そうではない非ゼロ和ゲーム状態ではあまり役に立たない。ナッシュ均衡が実現していれば、自分だけが戦略を変更しても自分の得にはならないので、自分の戦略を変える動機を持たないという意味で安定である。例えば、ナッシュ均衡(T,R)では、プレイヤー1 だけが T から B に戦略を変えても、3 から 0 へと利得が減少する。プレイヤー2 だけが R から L に戦略を変えても、4 から 0 へと利得が減少する。また、このゲームにはもうひとつ混合戦略におけるナッシュ均衡$\left(\frac{1}{2}\mathrm{T}+\frac{1}{2}\mathrm{B}, \frac{1}{2}\mathrm{L}+\frac{1}{2}\mathrm{R}\right)$（期待利得は(2,2)である）が存在する[9]。どのナッシュ均衡を実現するためにも、相手のプレイヤーのとる戦略を予想している必要がある。この点は 2 人ゼロ和ゲームと大きく違うところである。

例 5（混合戦略におけるナッシュ均衡）：次のゲームの混合戦略におけるナッシュ均衡を求めよう。

		プレイヤー2 の戦略	
		L	R
プレイヤー1 の戦略	T	2,1	$\underline{4}, \underline{2}$
	B	$\underline{3}, \underline{2}$	1,1

プレイヤー1 の混合戦略 $x\mathrm{T}+(1-x)\mathrm{B}$ を x、プレイヤー2 の混合戦略 $y\mathrm{L}+(1-y)\mathrm{R}$ を y で表すことにする。この時のプレイヤー1 と 2 の期待利得 $h_1(x,y)$ と $h_2(x,y)$ は

$$\begin{aligned} h_1(x,y) &= 2xy+4x(1-y)+3(1-x)y+1(1-x)(1-y) \\ &= (3-4y)x+2y+1 \\ h_2(x,y) &= 1xy+2x(1-y)+2(1-x)y+1(1-x)(1-y) \\ &= (1-2x)y+x+1 \end{aligned}$$

9 $p\mathrm{T}+(1-p)\mathrm{B}$ で確率 p で T を確率 $1-p$ で B を選ぶ混合戦略を現すことにする。

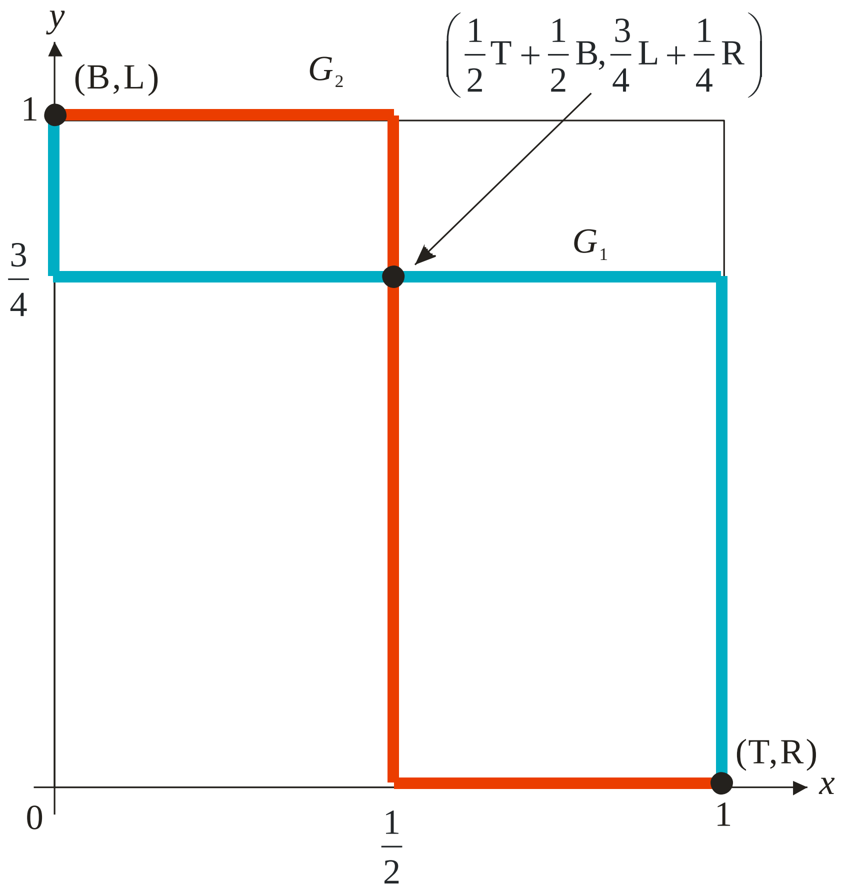
となる。y が与えられた時、$h_1(x,y)$ を最大にする x の値 $R_1(y)$（プレイヤー2 に対するプレイヤー1 の**最適反応対応**と呼ぶ）を求めると、

$$R_1(y)=\begin{cases} 0 & \left(y>\dfrac{3}{4}\right) \\ \text{任意} & \left(y=\dfrac{3}{4}\right) \\ 1 & \left(y<\dfrac{3}{4}\right) \end{cases}$$

同様に、x が与えられた時、$h_2(x,y)$ を最大にする y の値 $R_2(x)$（プレイヤー1 に対するプレイヤー2 の**最適反応対応**と呼ぶ）を求めると、

$$R_2(x)=\begin{cases} 0 & \left(x>\dfrac{1}{2}\right) \\ \text{任意} & \left(x=\dfrac{1}{2}\right) \\ 1 & \left(x<\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

グラフ $G_1=\left\{\left(R_1(y),y\right)\middle|0\le y\le 1\right\}$ と $G_2=\left\{\left(x,R_2(x)\right)\middle|0\le x\le 1\right\}$ の共通部分を求めると



$G_1 \cap G_2 = \left\{(0,1),\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right),(1,0)\right\}$ となる。例えば、$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)(\in G_1 \cap G_2)$ は $\frac{1}{2} \in R_1\left(\frac{3}{4}\right), \frac{3}{4} \in R_2\left(\frac{1}{2}\right)$ を意味し、互いが相手に対する最適反応になっているので、ナッシュ均衡となる。従って、このゲームのナッシュ均衡は(B,L)、$\left(\frac{1}{2}T+\frac{1}{2}B,\frac{3}{4}L+\frac{1}{4}R\right)$、(T,R)の 3 個になる。純粋戦略は混合戦略の特別な場合なので、純粋戦略におけるナッシュ均衡も同時に求められる。すなわち、すべてのナッシュ均衡を求める場合は上記の方法を用いると良い。

問題 3-4： 次のゲームのナッシュ均衡をすべて求めよ。(=>解答)

（1）（囚人のジレンマゲーム）

		プレイヤー2 の戦略	
		C	D
プレイヤー1 の戦略	C	5,5	2,6
	D	6,2	3,3

（2）（両性の戦い）

		プレイヤー2の戦略	
		V	B
プレイヤー1の戦略	V	5,10	0,0
	B	0,0	10,5

（3）（調整ゲーム）

		プレイヤー2の戦略	
		A	B
プレイヤー1の戦略	A	5,5	2,4
	B	4,2	3,3

（4）（チキンゲーム）

		プレイヤー2の戦略	
		C	B
プレイヤー1の戦略	C	3,3	1,5
	B	5,1	–10,–10

（5）

		プレイヤー2の戦略	
		H	T
プレイヤー1の戦略	H	2,1	0,4
	T	1,0	3,–1

AHP（Analytic Hierarchy Processes）

線形計画法では、1 次式の目的関数で与えられた評価基準をもとに、1 次式の制約条件式を満たす選択肢の中から、望ましいものを選んだ。ここでは他の意思決定方法である AHP を扱う。

AHP とは？

目的に対して複数の評価基準があり、その評価基準を利用して、幾つかの選択肢の中から、望ましいものを選びたい時がある。AHP とはその時に利用可能な方法である。線形計画問題も、例えば、与えられた資源を利用して利益を最大にするように製品を作る場合、利益を最大にするという評価基準を利用して、製品をどのように作るかを決定した。線形計画法を利用するには、問題自体が線形性を満たす必要がある。また、線形計画法を適用するためには、目的関数の係数や制約条件式の係数等のデータは既に知っている必要がある。一方、AHP においては、データをあらかじめ知っている必要はなく、その過程の中に、データを見積もることが入っている。

データを見積もることを含む、AHP 本来の意思決定法は後で説明するが、ここでは AHP の基本的な考え方を知るためにデータが既に分かっている場合を考察する。

例 1 : 温泉へ旅行を計画している。目的地の候補として A 温泉と B 温泉と C 温泉の 3 つがある。この目的地の良さを評価する基準は、「湯の質」と「立地環境」である。決定に際して利用するデータは以下の通りである。

評価基準の重要度

湯の質	立地環境
0.3	0.7

評価基準に対する各候補地の重要度

評価基準	A 温泉	B 温泉	C 温泉
湯の質	0.25	0.38	0.37
立地環境	0.33	0.35	0.32

上の表において重要度は（水平方向の）合計が 1 となるように正規化されている。最初の「評価基準の重要度」の表から、2 つの評価基準「湯の質」と「立

地環境」の目的地の良さを評価する基準としての重要度は 0.3 と 0.7 である。次の「評価基準に対する各候補地の重要度」の表から、評価基準「湯の質」に対しては、A 温泉、B 温泉、C 温泉の重要度は、各々、0.25、0.38、0.37 であり、評価基準「立地環境」に対しては、A 温泉、B 温泉、C 温泉の重要度は、各々、0.33、0.35、0.32 である。これらより、それぞれの温泉の総合評価を求めると、下表のようになる。A 温泉の総合評価は$0.3\times0.25+0.7\times0.33=0.306$、B 温泉の総合評価は $0.3\times0.38+0.7\times0.35=0.359$ であり、C 温泉の総合評価は $0.3\times0.37+0.7\times0.32=0.335$ である。最大値は B 温泉の 0.359 であるので、B 温泉に行くのが最も望ましいと判断できる。

総合評価

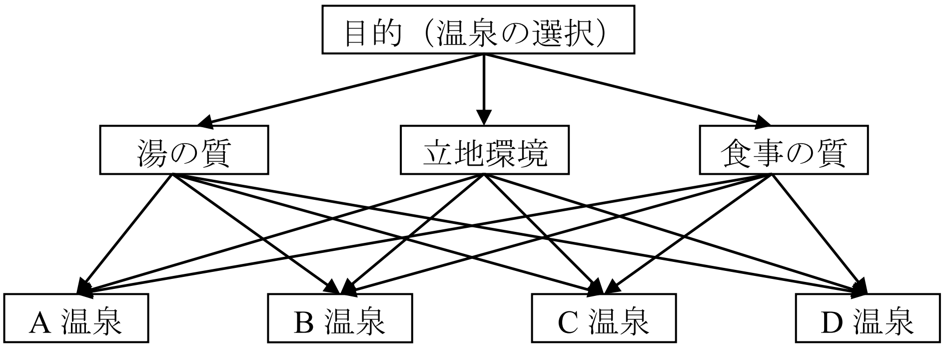
評価基準	重要度	A 温泉	B 温泉	C 温泉
湯の質	0.3	0.25	0.38	0.37
立地環境	0.7	0.33	0.35	0.32
	総合評価	0.306	0.359	0.335

上記の例のように、意思決定を行う目的に対する各評価基準の重要度と各評価基準に対する代替案の重要度が分かれば、それを掛け合わせ、合計することにより、各代替案の総合評価が求まり、総合評価を最大にする代替案を選べば良いことが分かった。

AHP の基礎

データを見積もることも含む AHP の意思決定法を上記の例よりも少しだけ複雑な例を利用して説明する。

例 2 : 温泉へ一泊旅行を計画している。目的地の候補として A 温泉と B 温泉と C 温泉と D 温泉の 4 つがある。この目的地の良さを評価する基準は、「湯の質」と「立地環境」と「食事の質」である。



AHP の階層図

まず、上図のように階層図を書くと問題の構造が分かりやすくなる。次に、目的（温泉の選択）に対する 3 つの評価基準、「湯の質」、「立地環境」、「食事の質」の重要度を見積もろう。多くの物の間の心の中にある重要度を一度に見積もることは困難であるが、一度に 2 つの間の重要度を見積もることはそれほど難しいことではない。従って、一対比較を積み上げることによって、この 3 つの評価基準の目的に対する重要度を見積もる。

目的に対する評価基準の一対比較表

目的	湯の質	立地環境	食事の質
湯の質	1		
立地環境		1	
食事の質			1

一対比較表で利用する数値

同程度に重要	1
少し重要	3
かなり重要	5
非常に重要	7
きわめて重要	9

このために上のような目的に対する評価基準の一対比較表を作成する。いまから、一対比較を行うことにより、この表の空欄を埋めていく。「湯の質」の行で「立地環境」の列の要素には、「湯の質」は「立地環境」に対してどれくらい重要であるかを記入する。記入する数値は重要さの程度に応じ 1, 3, 5, 7, 9 を利用する。（表の中で対角要素に既に 1 が入っているが、これは、例えば、「湯の

質」は「湯の質」に対して、当然であるが、同程度に重要であることを示している。）自分の心の中と相談し、「湯の質」は「立地環境」に対して「少し重要」、「湯の質」も「食事の質」に対して「少し重要」、「立地環境」も「食事の質」に対して「少し重要」となった。埋めるべき空欄は 6 個あるが、一対比較は ${}_{3}C_{2}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3$ 通りすれば良く、残りの 3 つの要素は逆数を記入すればよい。例えば、「湯の質」の行で「立地環境」の列は「少し重要」なので 3 を記入するが、「立地環境」の行で「湯の質」の列は逆数の $\frac{1}{3}$ を記入する。その結果得られた一対比較表は次のようになる。

目的に対する評価基準の一対比較表（結果）

目的	湯の質	立地環境	食事の質
湯の質	1	3	3
立地環境	$\frac{1}{3}$	1	3
食事の質	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

同様に、各評価項目に対する 3 つの代替案の一対比較表を下記の表を埋めることによって作成する。

各評価項目に対する代替案の一対比較表

評価項目	A 温泉	B 温泉	C 温泉	D 温泉
A 温泉	1			
B 温泉		1		
C 温泉			1	
D 温泉				1

自分の心と相談して埋めた結果、次のようになった。

評価項目「湯の質」に対する代替案の一対比較表（結果）

湯の質	A 温泉	B 温泉	C 温泉	D 温泉
A 温泉	1	3	5	5
B 温泉	$\frac{1}{3}$	1	5	3
C 温泉	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1
D 温泉	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	1

評価項目「立地環境」に対する代替案の一対比較表（結果）

立地環境	A 温泉	B 温泉	C 温泉	D 温泉
A 温泉	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
B 温泉	3	1	3	$\frac{1}{5}$
C 温泉	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{9}$
D 温泉	3	5	9	1

評価項目「食事の質」に対する代替案の一対比較表（結果）

食事の質	A 温泉	B 温泉	C 温泉	D 温泉
A 温泉	1	1	$\frac{1}{3}$	5
B 温泉	1	1	$\frac{1}{7}$	3
C 温泉	3	7	1	7
D 温泉	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	1

心と相談して求めたこれらの 4 つの一対比較表をもとに目的に対する各評価基準の重要度と、各評価基準に対する 3 つの案の重要度を求める。ここでは、**幾何平均法**と呼ばれる方法を説明する。

まず、目的に関する評価基準の重要度を計算する。下表のように幾何平均の列に各行の幾何平均を求める。例えば、$2.080 = \sqrt[3]{1 \times 3 \times 3}$ である。次に、正規化の列に、今求めた、幾何平均をそれらの総和で割ったものを記入する。例えば、

$\dfrac{2.080}{2.080+1+0.481}=0.584$ である。正規化の列が目的に対する各評価基準の重要度である。

目的に対する評価基準の一対比較表（計算）

目的	湯の質	立地環境	食事の質	幾何平均	正規化
湯の質	1	3	3	2.080	0.584
立地環境	$\frac{1}{3}$	1	3	1.000	0.281
食事の質	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0.481	0.135

便宜のため、$X=\left(x_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, w=\left(w_i\right)=\begin{pmatrix} 0.584 \\ 0.281 \\ 0.135 \end{pmatrix}$ とおく。次に、行列

$Y=\left(y_{ij}\right); y_{ij}=x_{ij}\dfrac{w_j}{w_i}$ を計算し、**整合度** $\mathrm{CI}=\dfrac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}}{n}-n}{n-1}$ を求める。ただし、n はベクトル w の次元（今の場合は 3）である。

$$Y=\begin{pmatrix} 1.000 & 1.442 & 0.693 \\ 0.693 & 1.000 & 1.442 \\ 1.442 & 0.693 & 1.000 \end{pmatrix}, \mathrm{CI}=0.068$$

であれば、整合度が $\mathrm{CI}\le 0.1$ であれば、心と相談して見積もった一対比較行列 X は整合的である。もし、$\mathrm{CI}>0.1$ であれば、行列 Y で 1 から離れている要素に対応する一対比較を行い、X を修正するという再見積もりを行う。今の場合、$\mathrm{CI}=0.068<0.1$ なので、再見積もりを行う必要はない。

残りの 3 つの一対比較表に関しても、下記のように同様の計算を行う。

評価項目「湯の質」に対する代替案の一対比較表（計算）

湯の質	A 温泉	B 温泉	C 温泉	D 温泉	幾何平均	正規化
A 温泉	1	3	5	5	2.943	0.546
B 温泉	$\frac{1}{3}$	1	5	3	1.495	0.277
C 温泉	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	0.447	0.083
D 温泉	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	1	0.508	0.094

$$w = \begin{pmatrix} 0.546 \\ 0.277 \\ 0.083 \\ 0.094 \end{pmatrix} \text{であり、} Y = \begin{pmatrix} 1.000 & 1.524 & 0.760 & 0.863 \\ 0.656 & 1.000 & 1.495 & 1.019 \\ 1.316 & 0.669 & 1.000 & 1.136 \\ 1.158 & 0.981 & 0.880 & 1.000 \end{pmatrix}, \mathrm{CI} = 0.038 < 0.1 \text{となる。}$$

評価項目「立地環境」に対する代替案の一対比較表（計算）

立地環境	A 温泉	B 温泉	C 温泉	D 温泉	幾何平均	正規化
A 温泉	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0.577	0.103
B 温泉	3	1	3	$\frac{1}{5}$	1.158	0.207
C 温泉	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{9}$	0.439	0.079
D 温泉	3	5	9	1	3.409	0.611

$$w = \begin{pmatrix} 0.103 \\ 0.207 \\ 0.079 \\ 0.611 \end{pmatrix} \text{であり、} Y = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.669 & 0.760 & 1.968 \\ 1.495 & 1.000 & 1.136 & 0.589 \\ 1.316 & 0.880 & 1.000 & 0.863 \\ 0.508 & 1.699 & 1.158 & 1.000 \end{pmatrix}, \mathrm{CI} = 0.087 < 0.1 \text{となる。}$$

評価項目「食事の質」に対する代替案の一対比較表（計算）

食事の質	A 温泉	B 温泉	C 温泉	D 温泉	幾何平均	正規化
A 温泉	1	1	$\frac{1}{3}$	5	1.136	0.198
B 温泉	1	1	$\frac{1}{7}$	3	0.809	0.141
C 温泉	3	7	1	7	3.482	0.607
D 温泉	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	1	0.312	0.054

$w = \begin{pmatrix} 0.198 \\ 0.141 \\ 0.607 \\ 0.054 \end{pmatrix}$ であり、$Y = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.712 & 1.022 & 1.375 \\ 1.404 & 1.000 & 0.615 & 1.158 \\ 0.979 & 1.627 & 1.000 & 0.628 \\ 0.727 & 0.863 & 1.592 & 1.000 \end{pmatrix}$, $\mathrm{CI} = 0.059 < 0.1$ となる。

以上で、w で表現されている、評価基準の重要度ベクトル、各評価基準に対する 4 つの代替案の重要度ベクトルが求まった。下表の形でまとめて、総合的な評価を行うと、最大値は 0.374 であるので、A 温泉を選択すればよいことが分かる。

総合評価

評価基準	重要度	A 温泉	B 温泉	C 温泉	D 温泉
湯の質	0.584	0.546	0.277	0.083	0.094
立地環境	0.281	0.103	0.207	0.079	0.611
食事の質	0.135	0.198	0.141	0.607	0.054
	総合評価	0.374	0.239	0.152	0.234

補遺

割当問題の双対問題とその解釈：
原問題は

$$
\max \quad \begin{aligned} &8x_{11}+7x_{12}+2x_{13}+4x_{14} \\ &+7x_{21}+8x_{22}+9x_{23}+5x_{24} \\ &+8x_{31}+8x_{32}+9x_{33}+9x_{34} \\ &+5x_{41}+4x_{42}+4x_{43}+5x_{44} \end{aligned}
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1 \\ x_{11},\dots,x_{44}\ge 0 \end{cases}
$$

であった。双対問題は次のようになる。

$$
\min\ y_1+y_2+y_3+y_4+z_1+z_2+z_3+z_4
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} y_1+z_1\ge 8, & y_1+z_2\ge 7, \quad y_1+z_3\ge 2, \quad y_1+z_4\ge 4, \\ y_2+z_1\ge 7, & y_2+z_2\ge 8, \quad y_2+z_3\ge 9, \quad y_2+z_4\ge 5, \\ y_3+z_1\ge 8, & y_3+z_2\ge 8, \quad y_3+z_3\ge 9, \quad y_3+z_4\ge 9, \\ y_4+z_1\ge 5, & y_4+z_2\ge 4, \quad y_4+z_3\ge 4, \quad y_4+z_4\ge 5 \end{cases}
$$

この双対問題は次のように解釈できる。B 社は A 社から 4 人の人と、4 つの部屋を借りようとしている。それぞれの利用料を $y_1,y_2,y_3,y_4,z_1,z_2,z_3,z_4$ とする。B 社はこの費用をなるべく小さくしたい$\left(\min\ y_1+y_2+y_3+y_4+z_1+z_2+z_3+z_4\right)$。例えば、人 3 が部屋 2 を利用すれば8の利益を生むので、A 社は $y_3+z_2\ge 8$ でなければ、B 社に貸さないであろう。従って、この双対問題は、B 社が A 社から 4 人の人と 4 つの部屋を貸すという条件を満たしつつ、B 社の費用を最小にする問題と解釈できる。

	部屋 1 (z_1)	部屋 2 (z_2)	部屋 3 (z_3)	部屋 4 (z_4)
人 1(y_1)	8	7	2	4
人 2(y_2)	7	8	9	5
人 3(y_3)	8	8	9	9
人 4(y_4)	5	4	4	5

最大流量問題の双対問題とその解釈：

原問題は

$$
\max\ x_1 + x_2 + x_3
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
-x_1 + x_4 + x_6 = 0 \\
-x_2 - x_4 - x_7 + x_5 + x_8 = 0 \\
-x_3 - x_5 + x_9 + x_{10} = 0 \\
-x_6 + x_7 + x_{11} + x_{13} = 0 \\
-x_8 - x_9 - x_{11} + x_{12} + x_{14} = 0 \\
-x_{10} - x_{12} + x_{15} = 0 \\
x_1 \le 3, x_2 \le 8, x_3 \le 4, x_4 \le 5, x_5 \le 3 \\
x_6 \le 2, x_7 \le 2, x_8 \le 3, x_9 \le 7, x_{10} \le 5 \\
x_{11} \le 6, x_{12} \le 3, x_{13} \le 6, x_{14} \le 1, x_{15} \le 2 \\
x_1, \ldots, x_{15} \ge 0
\end{cases}
$$

であった。便宜のため、総流量を表す変数 f を導入し、節 S と T における流量の保存則も制約式に加えると、

$$\max\ f$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-f+x_1+x_2+x_3=0\\-x_1+x_4+x_6=0\\-x_2-x_4-x_7+x_5+x_8=0\\-x_3-x_5+x_9+x_{10}=0\\-x_6+x_7+x_{11}+x_{13}=0\\-x_8-x_9-x_{11}+x_{12}+x_{14}=0\\-x_{10}-x_{12}+x_{15}=0\\f-x_{13}-x_{14}-x_{15}=0\\x_1\le 3, x_2\le 8, x_3\le 4, x_4\le 5, x_5\le 3\\x_6\le 2, x_7\le 2, x_8\le 3, x_9\le 7, x_{10}\le 5\\x_{11}\le 6, x_{12}\le 3, x_{13}\le 6, x_{14}\le 1, x_{15}\le 2\\x_1,\ldots,x_{15}\ge 0\end{cases}$$

のようになる。この問題の双対問題は次のようになる。
節の流量保存則に対応する変数を $y_{\mathrm{S}}, y_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{C}}, y_{\mathrm{D}}, y_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{F}}, y_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{T}}$ で表し、枝の容量に対応する変数を $z_1,\ldots,z_{15}$ とおくと、

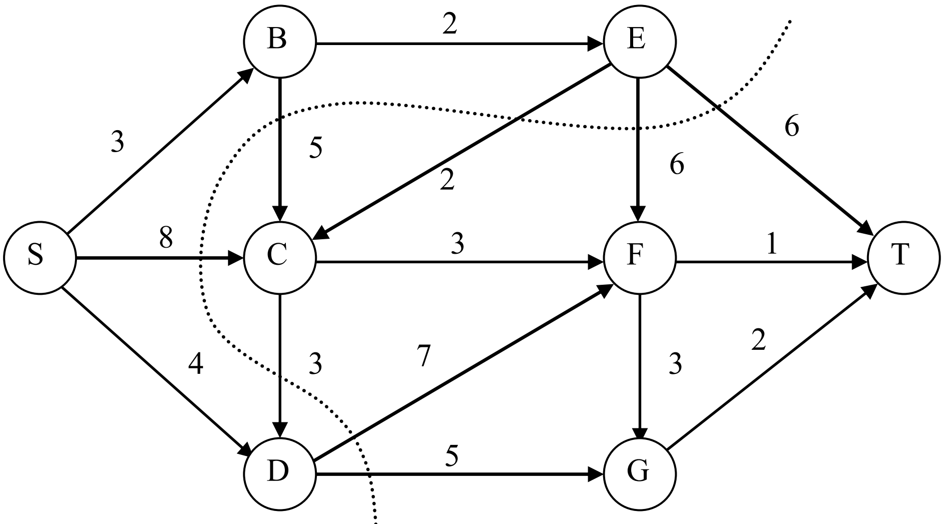
$$\begin{aligned}&3z_1+8z_2+4z_3+5z_4+3z_5\\ \min\ &+2z_6+2z_7+3z_8+7z_9+5z_{10}\\ &+6z_{11}+3z_{12}+6z_{13}+z_{14}+2z_{15}\end{aligned}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}z_1\ge y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{S}},\quad z_2\ge y_{\mathrm{C}}-y_{\mathrm{S}},\quad z_3\ge y_{\mathrm{D}}-y_{\mathrm{S}},\quad z_4\ge y_{\mathrm{C}}-y_{\mathrm{B}},\quad z_5\ge y_{\mathrm{D}}-y_{\mathrm{C}},\\z_6\ge y_{\mathrm{E}}-y_{\mathrm{B}},\quad z_7\ge y_{\mathrm{C}}-y_{\mathrm{E}},\quad z_8\ge y_{\mathrm{F}}-y_{\mathrm{C}},\quad z_9\ge y_{\mathrm{F}}-y_{\mathrm{D}},\quad z_{10}\ge y_{\mathrm{G}}-y_{\mathrm{D}},\\z_{11}\ge y_{\mathrm{F}}-y_{\mathrm{E}},\quad z_{12}\ge y_{\mathrm{G}}-y_{\mathrm{F}},\quad z_{13}\ge y_{\mathrm{T}}-y_{\mathrm{E}},\quad z_{13}\ge y_{\mathrm{T}}-y_{\mathrm{F}},\quad z_{13}\ge y_{\mathrm{T}}-y_{\mathrm{G}}\\ \qquad -y_{\mathrm{S}}+y_{\mathrm{T}}=1, z_1,\ldots,z_{15}\ge 0\end{cases}$$

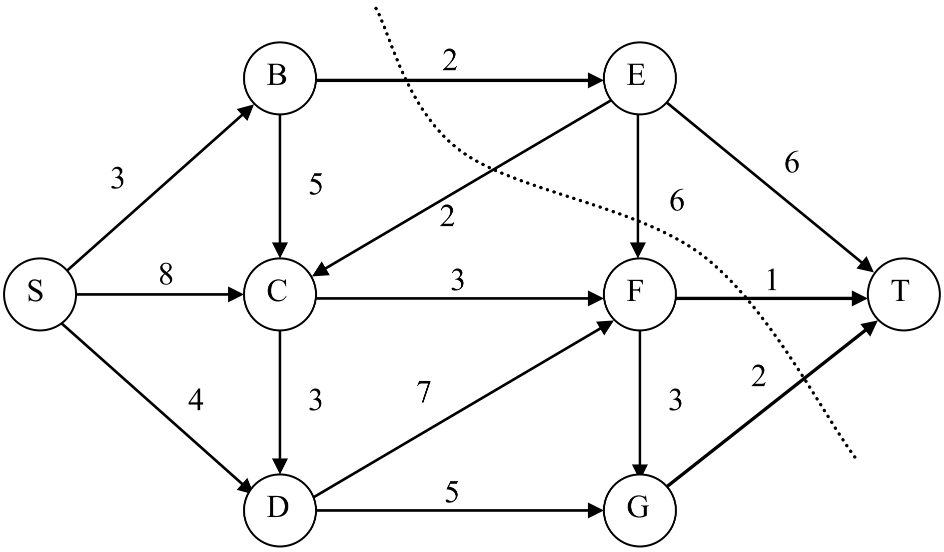
となる。この問題の最適解は $y_{\mathrm{S}}, y_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{C}}, y_{\mathrm{D}}, y_{\mathrm{E}}, y_{\mathrm{F}}, y_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{T}}$ が 0 または 1 の整数値、$z_1=\max\{y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{S}},0\},\ldots,z_{15}=\max\{y_{\mathrm{T}}-y_{\mathrm{G}},0\}$ の時に与えられることが分かっている。$-y_{\mathrm{S}}+y_{\mathrm{T}}=1$ より、$y_{\mathrm{S}}=0, y_{\mathrm{T}}=1$ である。節 S、B、C、D、E、F、G、T を y の値が 0 の節の集合 X と y の値が 1 の節の集合 Y に分ける。$\mathrm{S}\in X, \mathrm{T}\in Y$ である。(X,Y) を**カット**と呼ぶ。その時の和
$3z_1+8z_2+4z_3+5z_4+3z_5+2z_6+2z_7+3z_8+7z_9+5z_{10}+6z_{11}+3z_{12}+6z_{13}+z_{14}+2z_{15}$ をカットの**容量**と呼ぶ。これは X から Y に向かう枝の容量の和であり、多くてもこのカットの容量までしか S から T まで流すことができない。この双対問題は、カットの容量を最小にするカット（最小カットと呼ぶ）を見つける問題である。最小カットにおいてはその容量を求める時に利用した各枝の（最大流量問題における）流量がその枝の容量に等しいことになる。すなわち、最大流量を流す

ために無駄がない枝の集合である。

下図より、カット$(\{S,B,E,D\},\{C,F,G,T\})$の容量は$6+6+2+5+8+7+5=39$である。



下図のように、最小カットは$(\{S,B,C,D,F,G\},\{E,T\})$でその容量は$2+1+2=5$であった。



問の解答

問 1-1：

問題文より、各々のパン 1 斤作るために必要な、小麦粉、バター、砂糖、レーズンの量、手持ち資源の量、及び、販売価格を適切な位置に入れて表を作ると、次のようになる。

	普通のパン	高級パン	レーズンパン	手持ち資源の量
小麦粉	300	300	250	2000
バター	15	40	30	200
砂糖	20	30	30	400
レーズン	0	50	150	400
販売単価	200	250	300	

普通のパン、高級パン、レーズンパンを、各々、x_1, x_2, x_3 斤作るとすると、この表より、

$$
\max\ 200x_1 + 250x_2 + 300x_3
$$
$$
\text{s.t.}\begin{cases}
300x_1 + 300x_2 + 250x_3 \le 2000 \\
15x_1 + 40x_2 + 30x_3 \le 200 \\
20x_1 + 30x_2 + 30x_3 \le 400 \\
50x_2 + 150x_3 \le 400 \\
x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{cases}
$$

となる。

問 1-3：

解くべき問題は

シンプレックス表は以下のようになる。ピボットはウィンドウの最下行に示されている。

x1	x2	x3	SL1	SL2	SL3	SL4	1
1	13/18	0	1/300	0	0	-1/180	4+4/9
0	19+1/6	0	-1/20	1	0	-7/60	53+1/3
0	5+5/9	0	-1/15	0	1	-4/45	231+1/9
0	1/3	1	0	0	0	1/150	2+2/3
0	5+5/9	0	-2/3	0	0	-8/9	-1688-8/9

x1	x2	x3	SL1	SL2	SL3	SL4	1
1	0	0	3/575	-13/345	0	-2/1725	2+10/23
0	1	0	-3/1150	6/115	0	-7/1150	2+18/23
0	0	0	-6/115	-20/69	1	-19/345	215+15/23
0	0	1	1/1150	-2/115	0	1/115	1+17/23
0	0	0	-15/23	-20/69	0	-59/69	-1704-8/23

これより、$x_1 = \frac{56}{23} = 2\frac{10}{23}, x_2 = \frac{64}{23} = 2\frac{18}{23}, x_3 = \frac{40}{23} = 1\frac{17}{23}$ の時、最大値 $\frac{39200}{23} = 1704\frac{8}{23}$ をとる。すなわち、普通のパン、高級パン、レーズンパンを各々、$2\frac{10}{23}$ 斤、$2\frac{18}{23}$ 斤、$1\frac{17}{23}$ 斤作ると、最大の利益が $1,704\frac{8}{23}$ 円となる。

問 1-5：

（1）　目的関数を -1 倍して最大化問題に変えて、

$$\max -x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 \ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解くべき問題は

シンプレックス表は以下のようになる。ピボットはウィンドウの最下行に示されている。

x1	x2	x3	SL1	SU2	1
0	0	-1	1	1/2	7
1	0	-1	0	1/2	2
0	1	1	0	-1	1
0	0	-2	0	-1-1/2	4

これより、$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$ の時、最大値 -4 をとる。従って、元の問題の最小値は 4 である。

（2）目的関数を -1 倍して最大化問題に変えて、

$$\max -4x_1 - 6x_2 + x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解くべき問題は

x1	x2	x3		1
非負変数	非負変数	非負変数		
4	2	-1	<=	1
1	3	2	<=	1
-4	-6	1	<----	目的関数

シンプレックス表は以下のようになる。ピボットはウィンドウの最下行に示されている。

これより、$x_1 = x_2 = 0, x_3 = \dfrac{1}{2}$ の時、最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。元の問題の最小値は $-\dfrac{1}{2}$ となる。

（3） 解くべき問題は

シンプレックス表は以下のようになる。ピボットはウィンドウの最下行に示されている。

x1	x2	x3	SL1	SL2	SL3	1
1	0	2	1	0	0	2
5	2	7	0	1	0	1
2	4	1	0	0	1	10
2	1	3	0	0	0	0

実行可能です。最適解を探します。Pivot: 2 行3 列

x1	x2	x3	SL1	SL2	SL3	1
-3/7	-4/7	0	1	-2/7	0	1+5/7
5/7	2/7	1	0	1/7	0	1/7
1+2/7	3+5/7	0	0	-1/7	1	9+6/7
-1/7	1/7	0	0	-3/7	0	-3/7

実行可能です。最適解を探します。Pivot: 2 行2 列

x1	x2	x3	SL1	SL2	SL3	1
1	0	2	1	0	0	2
2+1/2	1	3+1/2	0	1/2	0	1/2
-8	0	-13	0	-2	1	8
-1/2	0	-1/2	0	-1/2	0	-1/2

最適解です！ 最大値は 1/2

これより、$x_1=0, x_2=\dfrac{1}{2}, x_3=0$ の時、最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

問 1-6：

（1）

（原問題）

$$\min x_1 + 2x_2 + 3x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 \ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

双対問題が作りやすい形に問題を書き換えて

$$\min x_1 + 2x_2 + 3x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 \ge -10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 5 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 \ge -5 \\ x_2 + x_3 \ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

この問題の双対問題を作ると、

$$\max -10y_1 + 5y_2^+ - 5y_2^- + y_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} -y_1 + 2y_2^+ - 2y_2^- \le 1 \\ -y_1 + y_2^+ - y_2^- + y_3 \le 2 \\ y_1 - y_2^+ + y_2^- + y_3 \le 3 \\ y_1, y_2^+, y_2^-, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

$y_2 = y_2^+ - y_2^-$ とおき、書き直すと、

（双対問題）

$$\max -10y_1 + 5y_2 + y_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \le 1 \\ -y_1 + y_2 + y_3 \le 2 \\ y_1 - y_2 + y_3 \le 3 \\ y_1, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

となる。ここで、原問題の等式に対応する双対問題の変数 y_2 は非負変数ではなく、負の値もとり得る自由変数である。

この双対問題を解く。アプリケーション上では、変数は y ではなく x である。

x1	x2	x3		1
非負変数	自由変数	非負変数		
-1	2	0	<=	1
-1	1	1	<=	2
1	-1	1	<=	3
-10	5	1	<----	目的関数

シンプレックス表は以下のようになる。ピボットはウィンドウの最下行に示されている。

x1	(x2+)	(x2-)	x3	SL1	SL2	SL3	1
-1	2	-2	0	1	0	0	1
-1	1	-1	1	0	1	0	2
1	-1	1	1	0	0	1	3
-10	5	-5	1	0	0	0	0

実行可能です。最適解を探します。Pivot: 1 行2 列

x1	(x2+)	(x2-)	x3	SL1	SL2	SL3	1
-1/2	1	-1	0	1/2	0	0	1/2
-1/2	0	0	1	-1/2	1	0	1+1/2
1/2	0	0	1	1/2	0	1	3+1/2
-7-1/2	0	0	1	-2-1/2	0	0	-2-1/2

実行可能です。最適解を探します。Pivot: 2 行4 列

x1	(x2+)	(x2-)	x3	SL1	SL2	SL3	1
-1/2	1	-1	0	1/2	0	0	1/2
-1/2	0	0	1	-1/2	1	0	1+1/2
1	0	0	0	1	-1	1	2
-7	0	0	0	-2	-1	0	-4

これより、$y_1 = 0, y_2 = y_2^+ - y_2^- = \dfrac{1}{2} - 0 = \dfrac{1}{2}, y_3 = 1\dfrac{1}{2}$ の時、最大値 4 をとる。これは原問題の最小値と一致する。

（2）

$$
\text{（原問題）}\qquad
\begin{aligned}
&\min 4x_1 + 6x_2 - x_3 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

双対問題を作りやすい形に問題を書き換えて、

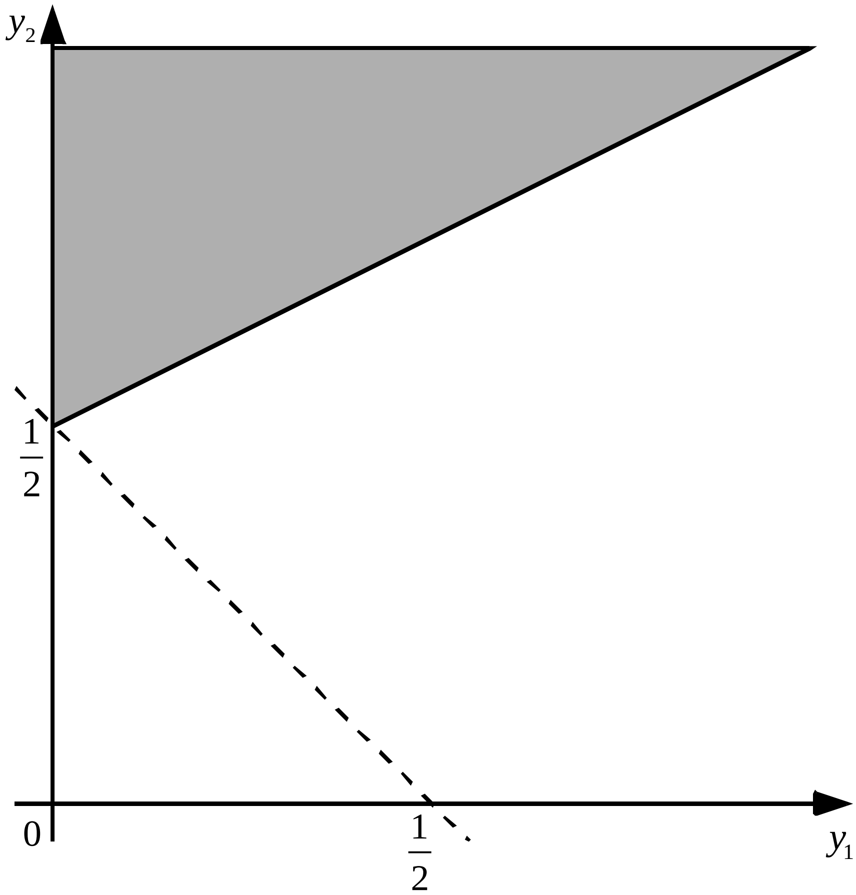
$$
\begin{aligned}
&\min 4x_1 + 6x_2 - x_3 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -1 \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 \ge -1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

この問題の双対問題を作ると、

$$
\text{（双対問題）}\qquad
\begin{aligned}
&\max -y_1 - y_2 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} -4y_1 - y_2 \le 4 \\ -2y_1 - 3y_2 \le 6 \\ y_1 - 2y_2 \le -1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

となる。

この双対問題は 2 変数の問題なので図で解ける。下図を参考にすると、$y_1 = 0, y_2 = \frac{1}{2}$ の時、最大値 $-\frac{1}{2}$ をとる。



次に、シンプレックス法を利用して解く。

x1	x2		1
非負変数	非負変数		
-4	-1	<=	4
-2	-3	<=	6
1	-2	<=	-1
-1	-1	<----	目的関数

シンプレックス表は以下のようになる。ピボットはウィンドウの最下行に示されている。

これより、$y_1 = 0, y_2 = \dfrac{1}{2}$ の時、最大値 $-\dfrac{1}{2}$ をとる。これは原問題の最小値と一致する。

（3）

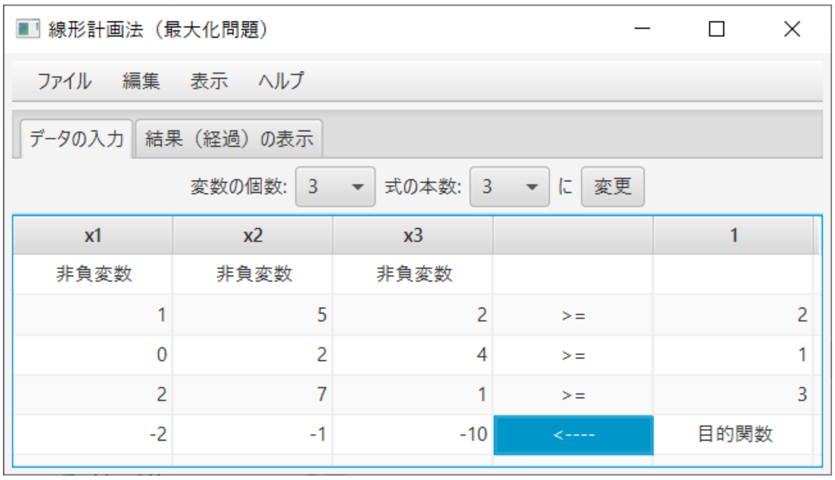
（原問題）

$$
\max\ 2x_1 + x_2 + 3x_3
$$
$$
\text{s.t.} \begin{cases} x_1 \qquad\quad + 2x_3 \le 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 \le 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 10 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}
$$

これの双対問題は

$$\text{（双対問題）}\qquad \begin{aligned} &\min 2y_1 + y_2 + 10y_3 \\ &\text{s.t.} \begin{cases} y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ \quad 2y_2 + 4y_3 \geq 1 \\ 2y_1 + 7y_2 + y_3 \geq 3 \\ \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

（目的関数の符号を変えて、最大化問題として）解く。



x1	x2	x3		1
非負変数	非負変数	非負変数		
1	5	2	>=	2
0	2	4	>=	1
2	7	1	>=	3
-2	-1	-10	<----	目的関数

シンプレックス表は以下のようになる。ピボットはウィンドウの最下行に示されている。

x1	x2	x3	SU1	SU2	SU3	1
-1	-5	-2	1	0	0	-2
0	-2	-4	0	1	0	-1
-2	-7	-1	0	0	1	-3
-2	-1	-10	0	0	0	0


線形計画法（最大化問題）
ファイル　編集　表示　ヘルプ
データの入力
結果（経過）の表示
ステップ実行
解く

x1	x2	x3	SU1	SU2	SU3	1
0	-1-1/2	-1-1/2	1	0	-1/2	-1/2
0	-2	-4	0	1	0	-1
1	3+1/2	1/2	0	0	-1/2	1+1/2
0	6	-9	0	0	-1	3

実行可能解を探します。Pivot: 3 行2 列


線形計画法（最大化問題）
ファイル　編集　表示　ヘルプ
データの入力
結果（経過）の表示
ステップ実行
解く

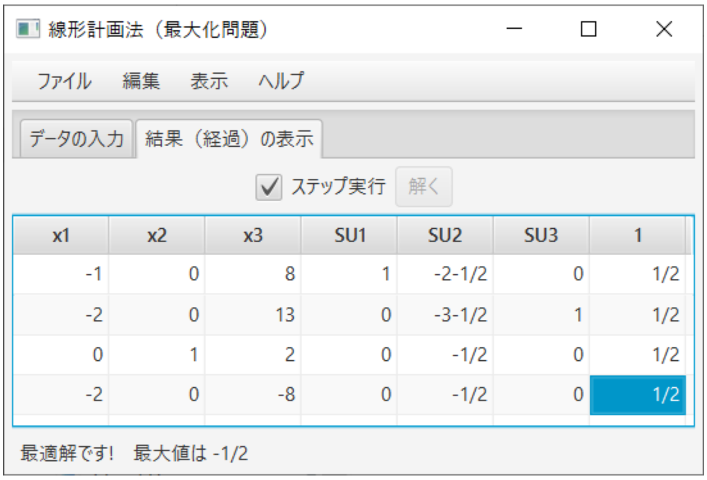
x1	x2	x3	SU1	SU2	SU3	1
3/7	0	-1-2/7	1	0	-5/7	1/7
4/7	0	-3-5/7	0	1	-2/7	-1/7
2/7	1	1/7	0	0	-1/7	3/7
-1-5/7	0	-9-6/7	0	0	-1/7	3/7

実行可能解を探します。Pivot: 2 行3 列


線形計画法（最大化問題）
ファイル　編集　表示　ヘルプ
データの入力
結果（経過）の表示
ステップ実行
解く

x1	x2	x3	SU1	SU2	SU3	1
3/13	0	0	1	-9/26	-8/13	5/26
-2/13	0	1	0	-7/26	1/13	1/26
4/13	1	0	0	1/26	-2/13	11/26
-3-3/13	0	0	0	-2-17/26	8/13	21/26

実行可能になりました！最適解を探します。Pivot: 2 行6 列



x1	x2	x3	SU1	SU2	SU3	1
-1	0	8	1	-2-1/2	0	1/2
-2	0	13	0	-3-1/2	1	1/2
0	1	2	0	-1/2	0	1/2
-2	0	-8	0	-1/2	0	1/2

これより、$y_1 = 0, y_2 = \dfrac{1}{2}, y_3 = 0$ の時、（元の最小化問題に戻すために、符号を変えて）最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。これは原問題の最大値と一致する。

問 1-7：

（原問題）

$$\max\ x_1 + 2x_2 + 3x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 12 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \le 10 \\ x_1, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

自由変数 x_2 を 2 つの非負変数 x_2^+, x_2^- の差 $\left(x_2 = x_2^+ - x_2^-\right)$ に直し、双対問題が作りやすい形に変形すると、

$$\max\ x_1 + 2x_x^+ - 2x_2^- + 3x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2^+ - x_2^- + x_3 \le 12 \\ x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- + 2x_3 \le 8 \\ -x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- - 2x_3 \le -8 \\ -x_1 + x_2^+ - x_2^- + 3x_3 \le 10 \\ x_1, x_2^+, x_2^-, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

この問題の双対問題を作ると、

$$
\min\ 12y_1 + 8y_2^+ - 8y_2^- + 10y_3
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
2y_1 + y_2^+ - y_2^- - y_3 \geq 1 \\
y_1 + 3y_2^+ - 3y_2^- + y_3 \geq 2 \\
-y_1 - 3y_2^+ + 3y_2^- - y_3 \geq -2 \\
y_1 + 2y_2^+ - 2y_2^- + 3y_3 \geq 3 \\
y_1, y_2^+, y_2^-, y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

自由変数 $y_2 = y_2^+ - y_2^-$ を導入し、整理すると、

（双対問題）

$$
\min\ 12y_1 + 8y_2 + 10y_3
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
2y_1 + y_2 - y_3 \geq 1 \\
y_1 + 3y_2 + y_3 = 2 \\
y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 3 \\
y_1, y_3 \geq 0
\end{cases}
$$

となる。原問題の自由変数 x_2 に対応する双対問題の式は等式に、原問題の等式に対応する双対問題の変数は自由変数 y_2 になることが分かる。

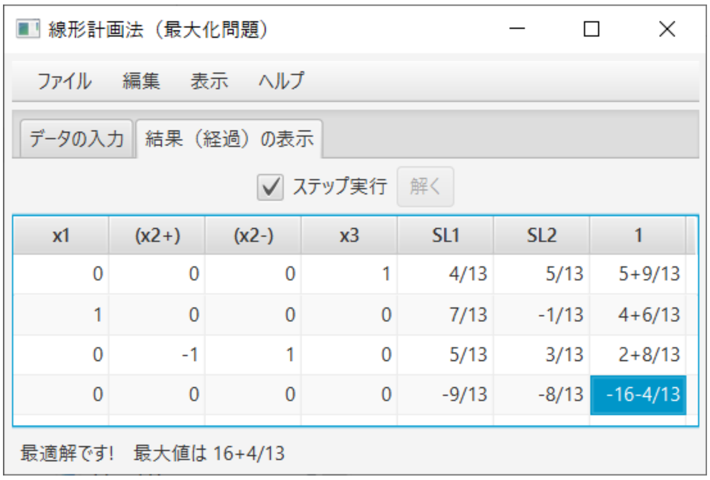
原問題を解く。

シンプレックス表は以下のようになる。ピボットはウィンドウの最下行に示されている。


線形計画法（最大化問題）
ファイル 編集 表示 ヘルプ
データの入力
結果（経過）の表示
ステップ実行
解く
x1 (x2+) (x2-) x3 SL1 SL2 1
0 -5 5 -3 1 0 -4
1 3 -3 2 0 0 8
0 4 -4 5 0 1 18
0 -1 1 1 0 0 -8
実行可能解を探します。Pivot: 1 行2 列

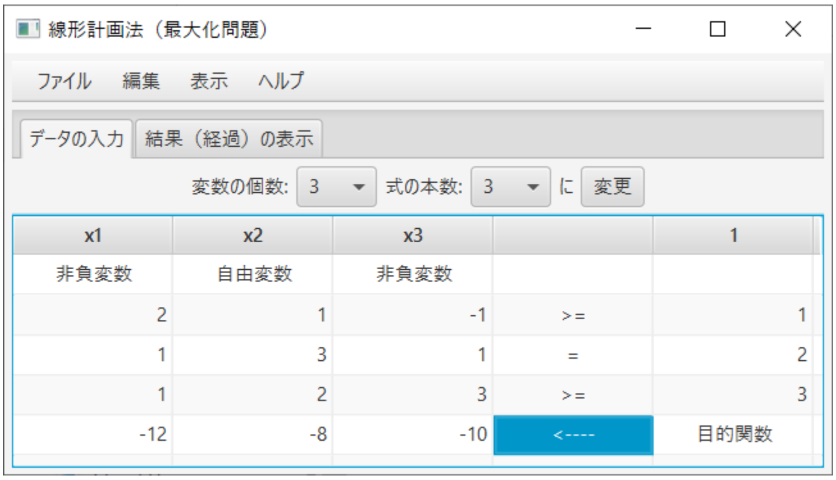

線形計画法（最大化問題）
ファイル 編集 表示 ヘルプ
データの入力
結果（経過）の表示
ステップ実行
解く
x1 (x2+) (x2-) x3 SL1 SL2 1
0 1 -1 3/5 -1/5 0 4/5
1 0 0 1/5 3/5 0 5+3/5
0 0 0 2+3/5 4/5 1 14+4/5
0 0 0 1+3/5 -1/5 0 -7-1/5
実行可能になりました！最適解を探します。Pivot: 1 行4 列


線形計画法（最大化問題）
ファイル 編集 表示 ヘルプ
データの入力
結果（経過）の表示
ステップ実行
解く
x1 (x2+) (x2-) x3 SL1 SL2 1
0 1+2/3 -1-2/3 1 -1/3 0 1+1/3
1 -1/3 1/3 0 2/3 0 5+1/3
0 -4-1/3 4+1/3 0 1+2/3 1 11+1/3
0 -2-2/3 2+2/3 0 1/3 0 -9-1/3
実行可能です。最適解を探します。Pivot: 3 行3 列



これより、$x_1 = 4\frac{6}{13}, x_2 = x_2^+ - x_2^- = 0 - 2\frac{8}{13} = -2\frac{8}{13}, x_3 = 5\frac{9}{13}$ の時、最大値 $\frac{212}{13} = 16\frac{4}{13}$ をとる。

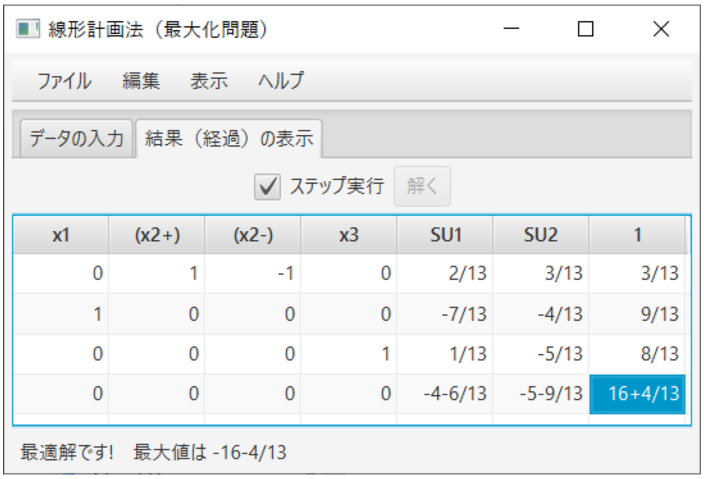
双対問題を解く。目的関数を -1 倍し、最大化問題に直すと、



シンプレックス表は以下のようになる。ピボットはウィンドウの最下行に示されている。

x1	(x2+)	(x2-)	x3	SU1	SU2	1
0	0	0	13	1	-5	8
1	0	0	7	0	-3	5
0	-1	1	2	0	-1	1
0	0	0	58	0	-28	52

x1	(x2+)	(x2-)	x3	SU1	SU2	1
0	6+1/2	-6-1/2	0	1	1+1/2	1+1/2
1	3+1/2	-3-1/2	0	0	1/2	1+1/2
0	-1/2	1/2	1	0	-1/2	1/2
0	29	-29	0	0	1	23



x1	(x2+)	(x2-)	x3	SU1	SU2	1
0	1	-1	0	2/13	3/13	3/13
1	0	0	0	-7/13	-4/13	9/13
0	0	0	1	1/13	-5/13	8/13
0	0	0	0	-4-6/13	-5-9/13	16+4/13

これより、$y_1=\frac{9}{13}, y_2=y_2^+-y_2^-=\frac{3}{13}-0=\frac{3}{13}, y_3=\frac{8}{13}$ の時、（-1倍し最小値に戻して）最小値 $\frac{212}{13}=16\frac{4}{13}$ をとる。これは原問題の最大値と一致している。

問 3-1：

まず、鞍点を探す方法を利用する。列方向で最大、行方向で最小の要素を探す

と、以下のように、赤の数値となる。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

次に、マクシミン値とミニマックス値を求める方法を利用する。

（１） $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & -1 & \\ -1 & 4 & -1 & \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 4 & & \\ 2 & & & 2 \end{array}\right)$ （２） $\left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 5 & -1 & -1 & \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -2 & \\ \hline 1 & 5 & 0 & & \\ & & 0 & & 0 \end{array}\right)$ （３）

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 5 & 1 & -3 & 0 & 2 & -3 & \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 & 1 & 6 & -1 & \\ \hline 5 & 2 & 7 & 2 & 6 & & \\ & 2 & & 2 & & & 2 \end{array}\right)$$

以上より、(1) 鞍点は$(3,1)$（プレイヤー1 とプレイヤー2 の最適戦略は、各々、3 と 1）でゲームの値は2、(2) 鞍点は$(2,3)$（プレイヤー1 とプレイヤー2 の最適戦略は、各々、2 と 3）でゲームの値は0、(3) 鞍点は$(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)$（プレイヤー1 の最適戦略は 2 と 3 で、プレイヤー2 の最適戦略は 2 と 4）でゲームの値は2、となる。

問 3-2：

プレイヤー1 と 2 の問題を双対問題として解釈しやすいように書き直すと、各々、

$$
\begin{aligned}
&v(A) := \max v \\
&\text{s.t.} \begin{cases} -h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j) + v \leq 0 \left(j = 1, \ldots, n \right) \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1 \\ x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&v(A) := \min u \\
&\text{s.t.} \begin{cases} -h(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{y}) + u \geq 0 \left(i = 1, \ldots, m \right) \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1 \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

となる。 $m = 3, n = 2$ の場合を書くと、

$$
\begin{aligned}
&\max v \\
&\text{s.t.} \begin{cases} -a_{11}x_1 - a_{21}x_2 - a_{31}x_3 + v \leq 0 \\ -a_{12}x_1 - a_{22}x_2 - a_{32}x_3 + v \leq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min u \\
&\text{s.t.} \begin{cases} -a_{11}y_1 - a_{12}y_2 + u \geq 0 \\ -a_{21}y_1 - a_{22}y_2 + u \geq 0 \\ -a_{31}y_1 - a_{32}y_2 + u \geq 0 \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

これらは互いに双対関係にある。

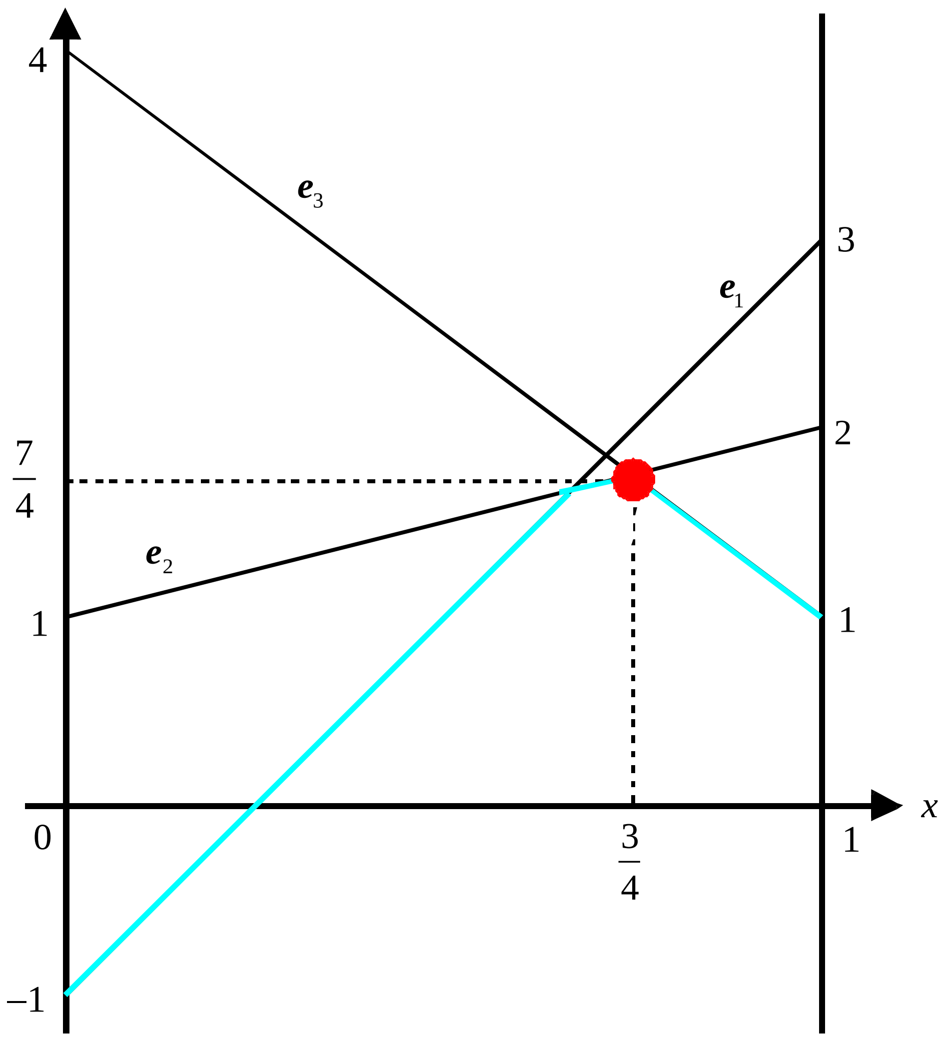
問 3-3： まず、どの問題も、純粋戦略において鞍点は存在しない。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$v(A)=\max_x\left\{\min\left\{3x-(1-x),2x+(1-x),x+4(1-x)\right\}\right\}$$
$$=\max_x\left\{\min\left\{4x-1,x+1,-3x+4\right\}\right\}$$

下図より、プレイヤー1 の最適戦略は $x^*=\frac{3}{4}$、すなわち、混合戦略 $\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ であり、

ゲームの値は $\frac{7}{4}$ である。



上図において、赤丸の横座標は

$$x+1=-3x+4$$
$$4x=3$$
$$x=\frac{3}{4}$$

縦座標（ゲームの値）は

$$v(A)=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$$

となる。

次に、プレイヤー2 の最適戦略を求める。$h(x^*,e_1)>v(A)$ であるので、$y_1^*=0$ である。プレイヤー1 は最適戦略においてどちらの純粋戦略、すなわち、戦略 1 も戦略 2 も正の確率で取るので、

$$h(\boldsymbol{e}_1,y)=2y_2+y_3=v(A)=\frac{7}{4}$$
$$h(\boldsymbol{e}_2,y)=y_2+4y_3=v(A)=\frac{7}{4}$$
$$y_2+y_3=1$$

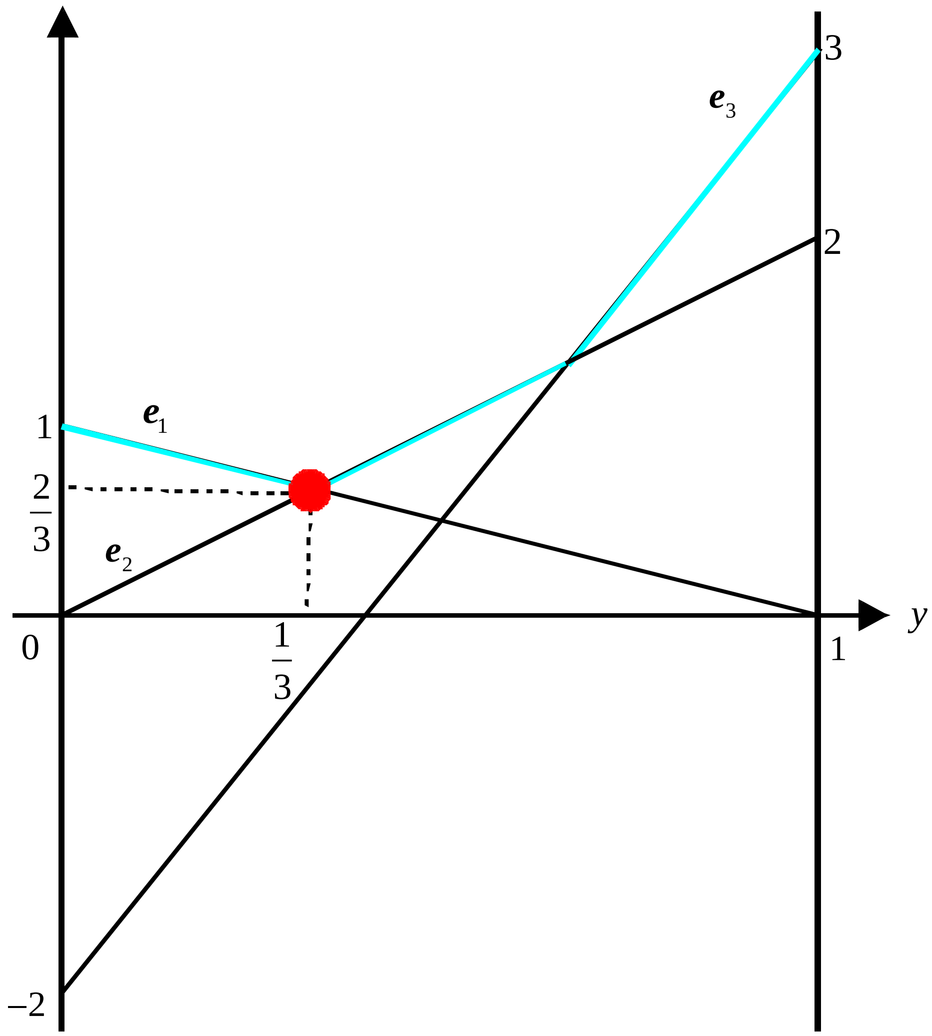
これを解くと、$y_2^*=\dfrac{3}{4},y_3^*=\dfrac{1}{4}$ となる。従って、プレイヤー2 の最適戦略は混合

戦略$\begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$となる。

(2) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

$$v(A)=\min_y\left\{\max\left\{0y+(1-y),2y+0(1-y),3y-2(1-y)\right\}\right\}$$
$$=\min_y\left\{\max\left\{-y+1,2y,5y-2\right\}\right\}$$

下図より、プレイヤー2 の最適戦略は $y^*=\dfrac{1}{3}$、すなわち、混合戦略 $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ であり、ゲームの値は $\dfrac{2}{3}$ である。



上図において、赤丸の横座標は

$$-y+1=2y$$
$$y=\frac{1}{3}$$
縦座標（ゲームの値）は
$$v(A)=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$
となる。

次に、プレイヤー1 の最適戦略を求める。$h(e_3,y^*)<v(A)$ であるので、$x_3^*=0$ である。プレイヤー2 は最適戦略においてどちらの純粋戦略、すなわち、戦略 1 も戦略 2 も正の確率で取るので、

$$h(x,e_1)=0x_1+2x_2=v(A)=\frac{2}{3}$$
$$h(x,e_2)=x_1+0x_2=v(A)=\frac{2}{3}$$
$$x_1+x_2=1$$

これを解くと、$x_1^*=\frac{2}{3},x_2^*=\frac{1}{3}$ となる。従って、プレイヤー2 の最適戦略は混合

戦略$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ 0\end{pmatrix}$となる。

(3) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

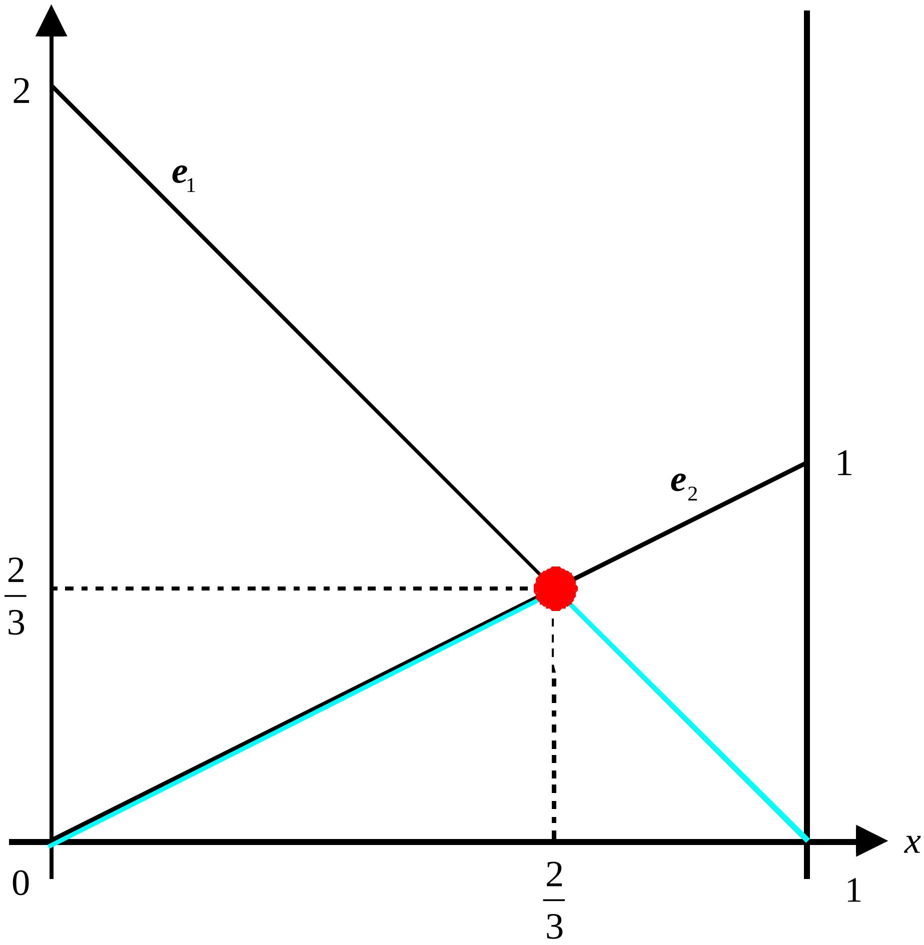
$1>2,2>1,0>-1$ であるので、プレイヤー1 は戦略 3 を利用しない。従って、行

列ゲーム$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$を解けばよい。このゲームにおいて、$2>1, 1>0$であるので、プレイヤー2は戦略1を利用しない。従って、行列ゲーム$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$を解けばよい。

$$\begin{aligned} v(A) &= \max_x \left\{ \min\left\{ 0x + 2(1-x), x + 0(1-x) \right\} \right\} \\ &= \max_x \left\{ \min\left\{ -2x + 2, x \right\} \right\} \end{aligned}$$

下図より、プレイヤー1の最適戦略は$x^* = \frac{2}{3}$、すなわち、(元のゲームに戻して)

混合戦略$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$であり、ゲームの値は$\frac{2}{3}$である。



上図において、赤丸の横座標は

$$-2x + 2 = x$$

$$x = \frac{2}{3}$$

縦座標（ゲームの値）は

$$v(A) = \frac{2}{3}$$

となる。

次に、プレイヤー2 の最適戦略を求める。プレイヤー1 は最適戦略において戦略 1 と戦略 2 を正の確率で取るので、

$$h(\boldsymbol{e}_1, y) = 0y + (1-y) = -y + 1 = v(A) = \frac{2}{3}$$
$$h(\boldsymbol{e}_2, y) = 2y + 0(1-y) = 2y = v(A) = \frac{2}{3}$$

これを解くと、 $y^* = \dfrac{1}{3}$ となる。従って、プレイヤー2 の最適戦略は（元のゲームに戻して）混合戦略 $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ となる。

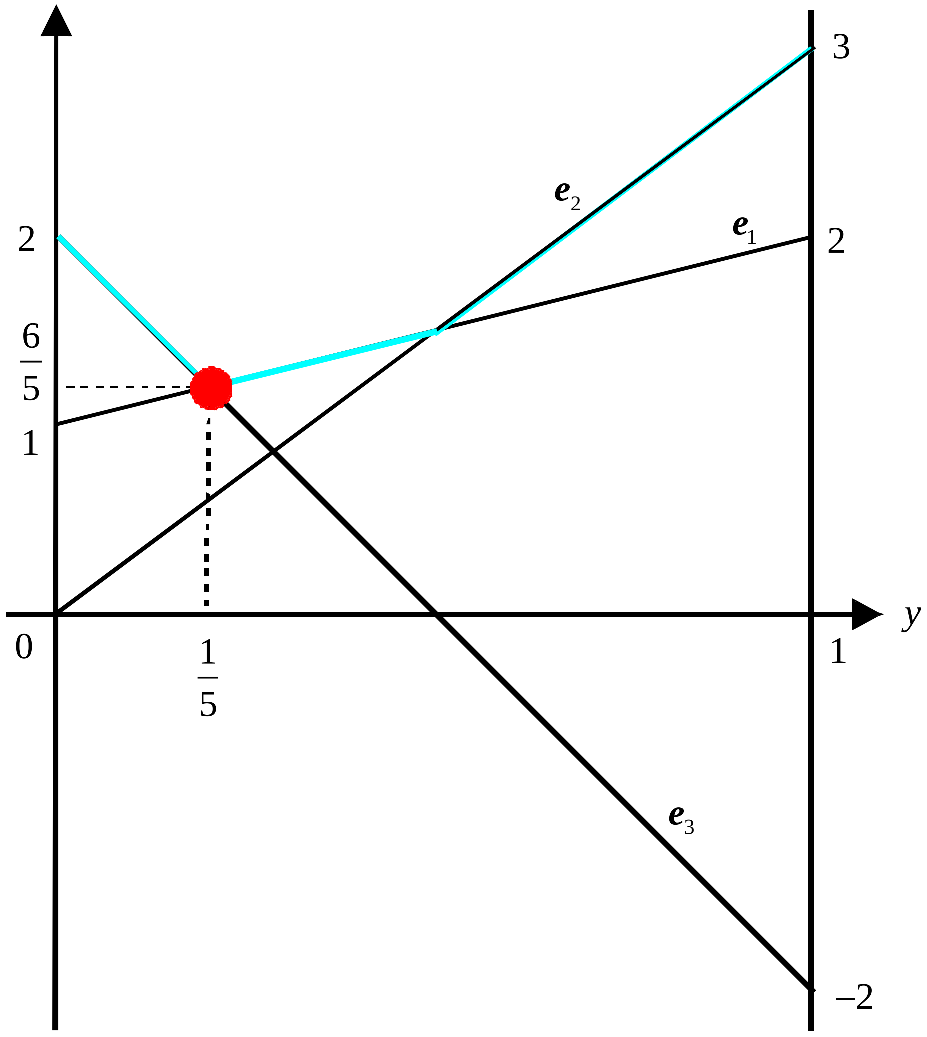
（4） $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$1 < 3, 0 < 1, 2 < 3$ であるので、プレイヤー2 は戦略 3 を利用しない。従って、行列ゲーム $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ を解けばよい。

$$\begin{aligned} v(A) &= \min_y \left\{ \max \left\{ 2y + (1-y), 3y + 0(1-y), -2y + 2(1-y) \right\} \right\} \\ &= \min_y \left\{ \max \left\{ y + 1, 3y, -4y + 2 \right\} \right\} \end{aligned}$$

下図より、プレイヤー2 の最適戦略は $y^* = \dfrac{1}{5}$、すなわち、（元のゲームに戻して）

混合戦略$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$であり、ゲームの値は$\frac{6}{5}$である。



上図において、赤丸の横座標は

$$y+1=-4y+2$$

$$y=\frac{1}{5}$$

縦座標（ゲームの値）は

$$v(A)=\frac{1}{5}+1=\frac{6}{5}$$

となる。

次に、プレイヤー1 の最適戦略を求める。$h(e_2, y^*) < v(A)$ であるので、$x_2^* = 0$ である。プレイヤー2 は最適戦略において戦略 1 と戦略 2 を正の確率で取るので、

$$h(x,\boldsymbol{e}_1)=2x_1-2x_3=v(A)=\frac{6}{5}$$

$$h(x,\boldsymbol{e}_2)=x_1+2x_3=v(A)=\frac{6}{5}$$

$$x_1+x_3=1$$

これを解くと、$x_1^*=\frac{4}{5}, x_3^*=\frac{1}{5}$ となる。従って、プレイヤー1 の最適戦略は混合戦略 $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ となる。

問 3-4：

(1)（囚人のジレンマゲーム）

		プレイヤー2 の戦略	
		C	D
プレイヤー1 の戦略	C	5,5	2,6
	D	6,2	3,3

ナッシュ均衡は(D,D)でそのときの利得は(3,3)である。

(2)（両性の戦い）

		プレイヤー2 の戦略	
		V	B
プレイヤー1 の戦略	V	5,10	0,0
	B	0,0	10,5

ナッシュ均衡は(V,V)と$\left(\frac{1}{3}\mathrm{V}+\frac{2}{3}\mathrm{B},\frac{2}{3}\mathrm{V}+\frac{1}{3}\mathrm{B}\right)$と(B,B)であり、期待利得は、各々、(5,10)と$\left(3\frac{1}{3},3\frac{1}{3}\right)$と(10,5)である。

（3）（調整ゲーム）

		プレイヤー2 の戦略	
		A	B
プレイヤー1 の戦略	A	5,5	2,4
	B	4,2	3,3

ナッシュ均衡は(A,A)と$\left(\frac{1}{2}\mathrm{A}+\frac{1}{2}\mathrm{B},\frac{1}{2}\mathrm{A}+\frac{1}{2}\mathrm{B}\right)$と(B,B)であり、期待利得は、各々、(5,5)と$\left(3\frac{1}{2},3\frac{1}{2}\right)$と(3,3)である。

（4）（チキンゲーム）

		プレイヤー2 の戦略	
		C	B
プレイヤー1 の戦略	C	3,3	1,5
	B	5,1	−10,−10

ナッシュ均衡は(B,C)と$\left(\frac{11}{13}\mathrm{C}+\frac{2}{13}\mathrm{B},\frac{11}{13}\mathrm{C}+\frac{2}{13}\mathrm{B}\right)$と(C,B)であり、期待利得は、各々、(5,1)と$\left(2\frac{9}{3},2\frac{9}{3}\right)$と(1,5)である。

（5）

		プレイヤー2の戦略	
		H	T
プレイヤー1の戦略	H	2,1	0,4
	T	1,0	3,−1

ナッシュ均衡は$\left(\frac{1}{4}\mathrm{H}+\frac{3}{4}\mathrm{T}, \frac{3}{4}\mathrm{H}+\frac{1}{4}\mathrm{T}\right)$でそのときの期待利得は$\left(1\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$である。

索引

ふ

ま

み

ゆ

よ

り

れ

わ