線形代数
微積分
入門

補遺・解答付

行方　常幸　著
URL: https://namekata.in.net/

はじめに

本書の前半は線形代数に関する、後半は微積分法に関する、入門書である。簡単な数値例を解くことにより、線形代数および微積分法に関する基本的な事柄を理解することを目標とする。

小学生の時、2 つの量の関係として正比例の関係を覚えた。ある量が 2 倍、3 倍となる時、他の量も 2 倍、3 倍となる関係である。この比例関係を一般化したもの（線形関係）を扱う数学が線形代数である。日常生活における 2 つの量の関係は必ずしも比例関係（線形関係）ではない。すなわち、比例関係（線形関係）は特別な関係であり、本書で見るように、その構造はかなり簡単である。そのため、われわれは最初の近似として比例関係を当てはめることが多い。本書では、線形関係が成立する場（線形集合）の例であり、馴染みが深いベクトル、行列から話を始める。その後、基本概念である 1 次独立、次元、基底などをベクトルと行列を利用して説明する。これらの準備を元に、中学時代から馴染みのある連立 1 次方程式が代表選手である線形方程式の解の構造と解法を学習する。

なお、列ベクトルのグラム・シュミットによる直交化、行列の積、階数、逆行列、行列式、固有多項式、固有値を求め、連立 1 次方程式を解く JavaFX のアプリケーション（行列の演算）を https://namekata.in.net/wp/javafx/アプリケーション集/ にアップロードしているので、ご利用ください。

1 次関数 $y=ax+b$ の傾きは a である。グラフを描く場合、x 軸方向に 1 だけ進む時に、y 軸方向に a だけ増える。この傾きを一般化したのが微分法である。これを学習することによって、曲線のグラフを描いたり、移動する物体の速さを求めたりできる。積分法は微分法の逆演算であるが、この積分法を利用することにより、曲線のグラフが囲む面積を求めたり、物体の移動の速さから移動した距離を求めることができる。

目次

内容

1章　ベクトル

この章では高校生時代から慣れているベクトルを扱う。ベクトルには和とスカラー倍という 2 つの演算が可能である。

例 1（家庭の資源利用）：昨年度の、A、B、C の各家庭の 1 週間あたりの平均の水道使用量、米の使用量、灯油の使用量は次の表のようであった。これら 3 軒の総使用量と B の 3 週間分の使用量を求めよう。

各家庭の使用量

	A	***B***	***C***
水道（立方メートル）	2	4	3
米（キログラム）	3	8	5
灯油（リットル）	45	98	80

$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\45\end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix}4\\8\\98\end{pmatrix},\mathbf{c}=\begin{pmatrix}3\\5\\80\end{pmatrix}$とおくと。3 軒の総使用量はこの 3 つのベクトルの和$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\begin{pmatrix}2+4+3\\3+8+5\\45+98+80\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\16\\223\end{pmatrix}$で計算できる。また。B の 3 週間分の使用量は$\mathbf{b}$のスカラー倍$3\mathbf{b}=3\begin{pmatrix}4\\8\\98\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times4\\3\times8\\3\times98\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\24\\294\end{pmatrix}$で計算できる。

上記の例のように数字（実数）をいくつか並べたものをまとめて 1 つとみなしたものが（数）ベクトルである。ベクトルには和とスカラー（実数）倍が可能である。ベクトルの和は要素毎の和であり、スカラー倍はすべての要素をそのスカラー倍にする。一般的に定義すると次のようになる：$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$を**（*n* 次元列）ベクトル**と呼ぶ。ただし、$a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$（実数）である。$a_1,a_2,...,a_n$は

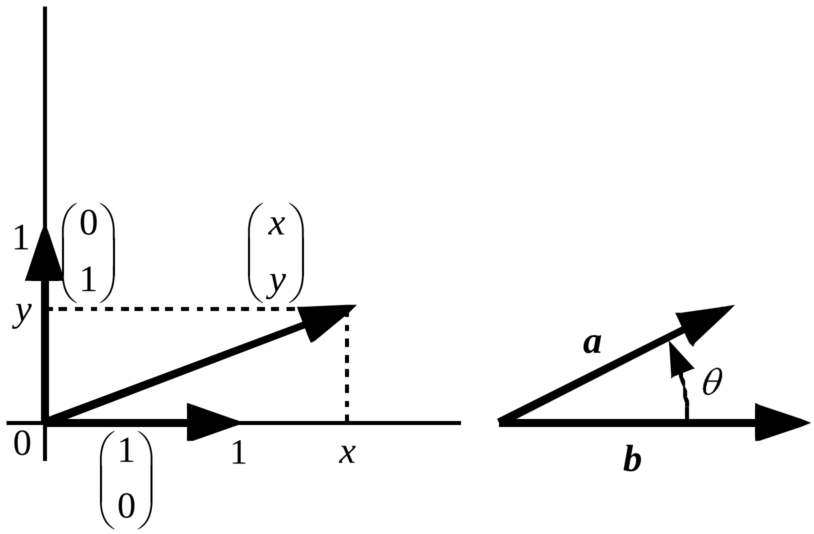
各々、ベクトルの**要素（成分）**と呼ばれる。2 つのベクトル $\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ の**和**は $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$ である。$\lambda \in \mathbb{R}$ とする。$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ の**スカラー倍**（λ 倍）は $\lambda\mathbf{a}=\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$ である。n 次元列ベクトルすべての集合を**（n 次元列）ベクトル空間**と呼び、$\mathbb{R}^n$ と表す。すなわち、$\mathbb{R}^n=\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ である。要素を横方向（行方向）に並べた場合、すなわち、$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ は**行ベクトル**と呼ばれる。要素がすべて零のベクトルを**零ベクトル**と呼び、$0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ と書く。また、$(-1)\mathbf{a}$ を $-\mathbf{a}$ と、また、$\mathbf{a}+(-1)\mathbf{b}$ を $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ と書く。

例 2（家庭の資源利用）：水道、米、灯油の単位あたりの料金が次の表のように与えられている時、各家庭の利用料金を求めよう。

単位あたりの価格	
水道（立方メートルあたり）	200
米（キログラムあたり）	400
灯油（リットルあたり）	85

価格ベクトルを$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}200\\400\\85\end{pmatrix}$とすると、A の利用料金は$\mathbf{p}$との$\mathbf{a}$内積$(\mathbf{p},\mathbf{a})=\left(\begin{pmatrix}200\\400\\85\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\45\end{pmatrix}\right)=200\times2+400\times3+85\times45=5,425$で計算できる。同様に B と C の利用料金も、$(\mathbf{p},\mathbf{b})=\left(\begin{pmatrix}200\\400\\85\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\8\\98\end{pmatrix}\right)=200\times4+400\times8+85\times98=12,330$と$(\mathbf{p},\mathbf{c})=\left(\begin{pmatrix}200\\400\\85\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\80\end{pmatrix}\right)=200\times3+400\times5+85\times80=9,400$となる。一般に 2 つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の**内積**を$(\mathbf{a},\mathbf{b})$と書き、次のように定義される。$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$の時、$(\mathbf{a},\mathbf{b})=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$である。また、ベクトル $\mathbf{a}$ の**長さ**を$|\mathbf{a}|$と書き、$|\mathbf{a}|=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$と定義される。

例 3（平面上のベクトル）：中学生以来の経験から、下図のように、平面は$\mathbb{R}^2$と同一視できる。



上図のように2次元ベクトル$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$のなす角をθとすると、$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$であった。

一般のn次元ベクトルに関しては、図が描けないので、図上で角を示すことができない、しかし、$-|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \le (\mathbf{a},\mathbf{b}) \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$（コーシー・シュワルツの不等式）が成り立つことに注意して、ベクトル$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$ $(\mathbf{a} \ne 0, \mathbf{b} \ne 0)$のなす角$\theta$ $(0 \le \theta \le \pi)$を次のように定義する：$\cos\theta = \dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$

問 1-1： $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\\0\\0\end{pmatrix}$の時、（1） $\mathbf{e}_i$ $(i = 1,2,3)$の長さ、（2） $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$ $(i \ne j)$のなす角、（3） $\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$のなす角を求めよ。（4） $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$をもとめよ。ただし、$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$である。（=>解答）

問 1-2：（1） りんごを3個、梨を5個、柿を4個買った。単価はそれぞれ130円、150円、120円であった。代金はいくらか？（2） 「振ったサイコロの目が1,2,3ならば100円貰い、4,5ならば200円貰い、6ならば300円支払う」という賭けに参加した。儲けの期待値はいくらか？（=>解答）

2章　線形空間

前章ではn次元列ベクトル空間$\mathbb{R}^n$を扱った。この章では、同じ構造を持つ（線形空間と呼ばれる）他の例を見てみる。$\mathbb{R}^n$には和とスカラー倍という演算が定義されていた。他の集合で同様に和とスカラー倍が定義されているものを見ていこう。

例1（n次多項式）：中学時代から2次多項式、ax^2+bx+cに慣れてきた。一般に、n次多項式の集合をP_nとおく。すなわち、

$P_n=\left\{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \,\middle|\, a_0,...,a_n\in\mathbb{R}\right\}$である。この$P_n$における和とスカラー倍を次のように定義する。

$f_1, f_2\in P_n, f_1=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0, f_2=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0, \lambda\in\mathbb{R}$の時、

$$f_1+f_2=\left(a_n+b_n\right)x^n+\cdots+\left(a_1+b_1\right)x+\left(a_0+b_0\right)$$
$$\lambda f_1=\left(\lambda a_n\right)x^n+\cdots+\left(\lambda a_1\right)x+\left(\lambda a_0\right)$$

この定義式から、

$$\left(a_n+b_n\right),...,\left(a_1+b_1\right),\left(a_0+b_0\right)\in\mathbb{R}$$
$$\left(\lambda a_n\right),...,\left(\lambda a_1\right),\left(\lambda a_0\right)\in\mathbb{R}$$

であることに注意すると、$f_1+f_2, \lambda f_1\in P_n$であることが分かる。すなわち、集合$P_n$は上記の和とスカラー倍という演算に関して閉じている。

例2（同次連立1次方程式の解）：中学時代から連立1次方程式を解いてきた。下記の未知変数がn個、式がm本ある同次連立1次方程式の解の集合を$S_{m,n}$とおく。

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

すなわち、$S_{m,n}=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \middle| \left\{\begin{matrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{matrix}\right.\right\}$である。この$S_{m,n}$は$n$次元列ベクトル空間$\mathbb{R}^n$の部分集合である。従って、その和とスカラー倍は$\mathbb{R}^n$の定義に従う。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\in S_{m,n},\lambda\in\mathbb{R}$の時

$$\left\{\begin{matrix} a_{11}(x_1+y_1)+\cdots+a_{1n}(x_n+y_n)=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)+(a_{11}y_1+\cdots+a_{1n}y_n)=0 \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1+y_1)+\cdots+a_{mn}(x_n+y_n)=(a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n)+(a_{m1}y_1+\cdots+a_{mn}y_n)=0 \end{matrix}\right.$$

$$\left\{\begin{matrix} a_{11}(\lambda x_1)+\cdots+a_{1n}(\lambda x_n)=\lambda(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)=0 \\ \vdots \\ a_{m1}(\lambda x_1)+\cdots+a_{mn}(\lambda x_n)=\lambda(a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n)=0 \end{matrix}\right.$$

より、$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\lambda\boldsymbol{x}\in S_{m,n}$となる。すなわち、同時連立1次方程式の解の集合$S_{m,n}$は和とスカラー倍という演算に関して閉じている。（$m=2,n=3$の時に、実際にチェックせよ。）

例3（数列）：数列の集合は次の和とスカラー倍に関して閉じている。数列の集合$S=\left\{(a_n)_{n=1,2,\ldots} \middle| a_n\in\mathbb{R}\ (n=1,2,\ldots)\right\}$の2つの要素$\boldsymbol{a}=(a_n)_{n=1,2,\ldots},\boldsymbol{b}=(b_n)_{n=1,2,\ldots}\in S$と実数$\lambda\in\mathbb{R}$に対して、次のように和とスカラー倍を定義する：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_n+b_n)_{n=1,2,\ldots}$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_n)_{n=1,2,\ldots}$$

$a_n+b_n,\lambda a_n\in\mathbb{R}\ (n=1,2,\ldots)$であるので$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\lambda\boldsymbol{a}\in S$となる。

例4（実数値関数）：馴染みの深い実数値関数の集合も次の和とスカラー倍に関して閉じている。実数値関数の集合$S=\left\{f \middle| f:D\to\mathbb{R}\right\}$（ただし、

$D \subset \mathbb{R}$）の 2 つの要素 $f_1, f_2 \in S$ と実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、次のように和とスカラー倍を定義する：

$$\left(f_1+f_2\right)(x)=f_1(x)+f_2(x)\left(x \in D\right)$$
$$\left(\lambda f_1\right)(x)=\lambda f_1(x)\left(x \in D\right)$$

$f_1(x)+f_2(x), \lambda f_1(x) \in \mathbb{R}$ であるので $f_1+f_2, \lambda f_1 \in S$ となる。

一般的に、**和とスカラー（実数）倍**が定義されている集合 V を**線形（ベクトル）空間**と呼ぶ。すなわち、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \lambda \boldsymbol{x} \in V$$

である。また、線形空間の部分集合で線形空間であるものを元の空間の**部分空間**と呼ぶ。例 2 の連立 1 次方程式の解の線形空間は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。もう少し線形空間の例をあげる。

例 5（連立線形差分方程式の解）：未知数列が $x^1, \ldots, x^n$ の n 個、式が n 本ある次の連立線形差分方程式の解の集合は線形空間である。

$$\left\{\begin{array}{c} x_{k+1}^1=a_{11} x_k^1+a_{12} x_k^2+\cdots+a_{1n} x_k^n \\ \vdots \\ x_{k+1}^n=a_{n1} x_k^1+a_{n2} x_k^2+\cdots+a_{nn} x_k^n \end{array}\right. \quad \left(k=1,2,\ldots\right)$$

これは例 3 の数列の線形空間の部分空間である。

公比が r の等比数列 $x=\left(x_k\right)_{k=1,2,\ldots}$ は線形差分方程式 $x_{k+1}=r x_k \left(k=1,2,\ldots\right)$ を満たす（チェックせよ）。公差が d の等差数列 $x=\left(x_k\right)_{k=1,2,\ldots}$ は線形差分方程式 $x_{k+1}=x_k+d \left(k=1,2,\ldots\right)$ を満たす（チェックせよ）。

例 6（連立線形微分方程式の解）：未知関数が $y_1, \ldots, y_n$ の n 個、式が n 本ある次の連立線形微分方程式の解の集合は線形空間である。

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

これは例 4 の線形空間の部分空間である。

関数 $y = e^{ax}$ は微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = ay$ を満たす（チェックせよ）。

問 2-1：（=>解答）
（1） 例 5 をチェックせよ。（2） 例 6 をチェックせよ。
（3） 差分方程式 $x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k = 0\ (k = 1, 2, \ldots)$ は
$x^1 = (x_k)_{k=1,2,\ldots},\ x^2 = (x_{k+1})_{k=1,2,\ldots}$ とおけば、$\begin{cases} x_{k+1}^1 = & & x_k^2 \\ x_{k+1}^2 = & -x_k^1 & +2x_k^2 \end{cases}$ となることをチェックせよ。
（4） 微分方程式 $y'' - 3y' - 2y = 0$ は $y_1 = y, y_2 = y'$ とおけば、

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = & & y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = & 2y_1 & +3y_2 \end{cases}$$ となることをチェックせよ。

3 章　1 次独立、次元、基底

この章では線形空間に関する基本的な事項を説明する。

k 個のベクトル $x_1,\dots,x_k \in V$ に対して $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$ を $x_1,\dots,x_k$ の **1 次結合**と呼ぶ。ただし、$\lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}$ である。

k 個のベクトル $x_1,\dots,x_k \in V$ に対して、$\lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}$ に関する次の方程式

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = 0$$

（ただし、右辺の 0 は V の零ベクトルである）が一意の解 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ を持つ時、$x_1,\dots,x_k$ は **1 次独立**であるという。1 次独立ではない場合、**1 次従属**であるという。

例えば、$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解くと、$\lambda = 0$ となるので、$\boldsymbol{a}$ は 1 次独立である。また、$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とすると、$2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となるので、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は 1 次従属である。例えば、$1\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ となるので、零ベクトル $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ は 1 次従属である。

線形空間 V において k 個の 1 次独立なベクトルは存在するが $k+1$ 個の 1 次独立なベクトルは存在しない時、k を線形空間 V の**次元**と呼び、$\dim V = k$ と表す。

次元が k である線形空間 V において k 個の 1 次独立なベクトルを（1 組の）**基底**と呼ぶ。

例 1（n 次元列ベクトル空間）： $\mathbb{R}^n$ の次の n 個のベクトル $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ は 1 次独立である。また、任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ の 1 次結合として表すことができる。

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\left(x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\right)$$

$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ より $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ となる。この n 個のベクトル $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の**基本ベクトル**と呼ぶ。また、$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$ が成り立つ。これは $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{x}$ が 1 次従属であることを示している。補遺にある「系」より $n+1$ 個のベクトルは 1 次従属であるので、$\mathbb{R}^n$ の次元は n となり、$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の（1 組の）基底である。これにより、$\mathbb{R}^n$ を n 次元列ベクトル空間と呼ぶ理由が確認できた。

問 3-1：（=>解答）

（1） $\mathbb{R}^4$ における次の 3 つのベクトルが 1 次独立かどうか調べよ。

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

（2） （1）に次のベクトル $\boldsymbol{a}_4$ を加えた 4 個のベクトルは 1 次独立かどうか調べよ。代わりに $\boldsymbol{b}_4$ を加えた場合はどうか調べよ。

$$\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

（3） 次の 4 個のベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ は 1 次独立かどうか調べよ。1 次従属ならばその関係式を求めよ。

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\-2\\4\\-2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\4\\-2\\6\end{pmatrix},\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

（4）次のベクトルが 1 次独立かどうか調べよ。もし、1 次従属ならば成り立つ関係式を求めよ。

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$$

問 3-1 の（2）より$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ が$\mathbb{R}^4$ の基底であることが分かった。

例 2（*n* 次多項式）：n 次多項式からなる線形空間P_n において次の$n+1$個のベクトルは 1 次独立であり、基底となる。従って、次元は$n+1$である。

$$x^n, x^{n-1},..., x,1$$

$\lambda_n x^n+\lambda_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\lambda_1 x+\lambda_0=0$を解く。この意味は、$x$ の恒等式として成り立つように$\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n$ を決定することである。$x=0$とおいて$\lambda_0=0$となり、元の恒等式は$\lambda_n x^{n-1}+\lambda_{n-1}x^{n-2}+\cdots+\lambda_2 x+\lambda_1=0$となる。$x=0$とおいて$\lambda_1=0$となり、・・・（以下同様・・・）。結局、$\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$となり、$x^n, x^{n-1},..., x,1$は 1 次独立となる。$P_n$ の任意の多項式

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ が $x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1$ の 1 次結合として表されるのは明らかである。従って、例 1 と同様に $x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1$ は P_n の基底となる。

　$1, x, x(x-1), \ldots, x(x-1)\bullet\cdots\bullet(x-n+1)$ は P_n の他の基底である。これを示すには x^k $(k=0,\ldots,n)$ を $1, x, x(x-1), \ldots, x(x-1)\bullet\cdots\bullet(x-n+1)$ の 1 次結合として表せばよい。 $x^k = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x(x-1) + \cdots + \lambda_n x(x-1)\bullet\cdots\bullet(x-n+1)$ となるように $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ を求める。左辺は x の k 次式なので、右辺も同様、すなわち、$\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ である。 x の $k+1$ 個の点で両辺が等しいとおき λ を求める： $x=0$ とおいて $\lambda_0 = 0$ となる。 $x=1$ とおいて $\lambda_1 = 1$ となる。 $x=i$ とおいて $i^k = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 i(i-1) + \cdots + \lambda_{i-1} i(i-1)\bullet\cdots\bullet 2 + \lambda_i i!$ となる。これより $\lambda_i = \dfrac{i^k - \lambda_1 i - \cdots - \lambda_{i-1} i(i-1)\bullet\cdots\bullet 2}{i!}$ $(i=2,\ldots,k)$ と帰納的に求めることができる。

問 3-2:例 2 を参考にして x^3 を $1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)$ の 1 次結合として表せ。 (=>解答)

　以上、$\mathbb{R}^n$ と P_n の基底を求めた。一般に、次の定理が成り立つ。

定理：「線形空間の任意のベクトルはその基底の 1 次結合として一意に表せる。」 (=>証明)

　従って、線形空間の構造を知るためには、その基底を求めることが重要になる。

　以下に、知っておくのが望ましい性質を列挙しておく。

性質：「k 個のベクトル $x_1, \ldots, x_k \in V$ の 1 次結合すべてからなる線形空間を $\langle x_1 \ \cdots \ x_k \rangle$ と書くことにする。すなわち、
$\langle x_1 \ \cdots \ x_k \rangle = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$ である。この時、$\langle x_1 \ \cdots \ x_k \rangle$ の次元は $x_1, \ldots, x_k \in V$ の 1 次独立なベクトルの個数（r とする）に等しい。
$\dim\langle x_1 \ \cdots \ x_k \rangle = r$ である。特に、最初の r 個が 1 次独立の場合、
$\langle x_1 \ \cdots \ x_k \rangle = \langle x_1 \ \cdots \ x_r \rangle$ となる。」 (=>証明)

　上記の表現を用いると、$\mathbb{R}^n = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$、$P_n = \langle x^n, \ldots, x, 1 \rangle$ と書ける。

1次独立な$\mathbb{R}^n$のベクトルが与えられた時、それから互いに直交するベクトルを求めることができる。

定理： $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k$を$\mathbb{R}^n$の1次独立なベクトルとする。$\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_k$を以下のように作れば、この$\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_k$は互いに直交する（この方法は**グラム・シュミットの直交化法**と呼ばれる）。（=>証明）

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a}_k - \dfrac{(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \cdots - \dfrac{(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_{k-1})}{(\boldsymbol{b}_{k-1},\boldsymbol{b}_{k-1})}\boldsymbol{b}_{k-1} \end{cases}$$

上記の定理で得られた$\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_k$から$\dfrac{\boldsymbol{b}_1}{|\boldsymbol{b}_1|},\ldots,\dfrac{\boldsymbol{b}_k}{|\boldsymbol{b}_k|}$を作ると、ベクトルの長さを1にできる。

例3： $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$にグラム･シュミットの直交化法を適用する。$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$である。

$(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1) = 0\times1+1\times1+1\times1 = 2, (\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1) = 1\times1+1\times1+1\times1 = 3$より、

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

である。

$(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1) = 0\times1+0\times1+1\times1 = 1, (\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2) = 0\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)+0\times\dfrac{1}{3}+1\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3},$

$\left(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$ より、

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{\left(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1\right)}{\left(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1\right)}\boldsymbol{b}_1-\frac{\left(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2\right)}{\left(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2\right)}\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ となる。更

に、長さを1にすると、$\frac{\boldsymbol{b}_1}{\left|\boldsymbol{b}_1\right|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix},\frac{\boldsymbol{b}_2}{\left|\boldsymbol{b}_2\right|}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix},\frac{\boldsymbol{b}_3}{\left|\boldsymbol{b}_3\right|}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ となる。

問 3-3: $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ にグラム・シュミットの直交化法を適用せよ。 (=>解答)

4 章　行列

行列とは実数を長方形の形に並べたものである。行列には和、スカラー倍、積が定義される。特に、行列の積には実数の積とは異なる様子見られる。

mn 個の実数を次のように長方形の形に並べたものが（m 行 n 列）**行列**である：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{または} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

第 i 行 j 列にある a_{ij} を (i, j) **要素**、または**成分**と呼ぶ。$m = n$ の時、（n 次の）**正方行列**という。同じ大きさの 2 つの行列

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ の**和**は次のように定義される：

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

行列 A の**スカラー倍**（λ 倍）は次のように定義される：

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

2 つの行列 A と B の**積** AB は左の行列 A の列の個数と右の行列 B の行の個数が等しい時に次のように定義される：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} \text{の時、} AB=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

ただし、$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\ (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)$である（下図参照）。積$AB$の行の個数は左の行列$A$の行の個数と等しくなり、積$AB$の列の個数は右の行列$B$の列の個数と等しくなる。

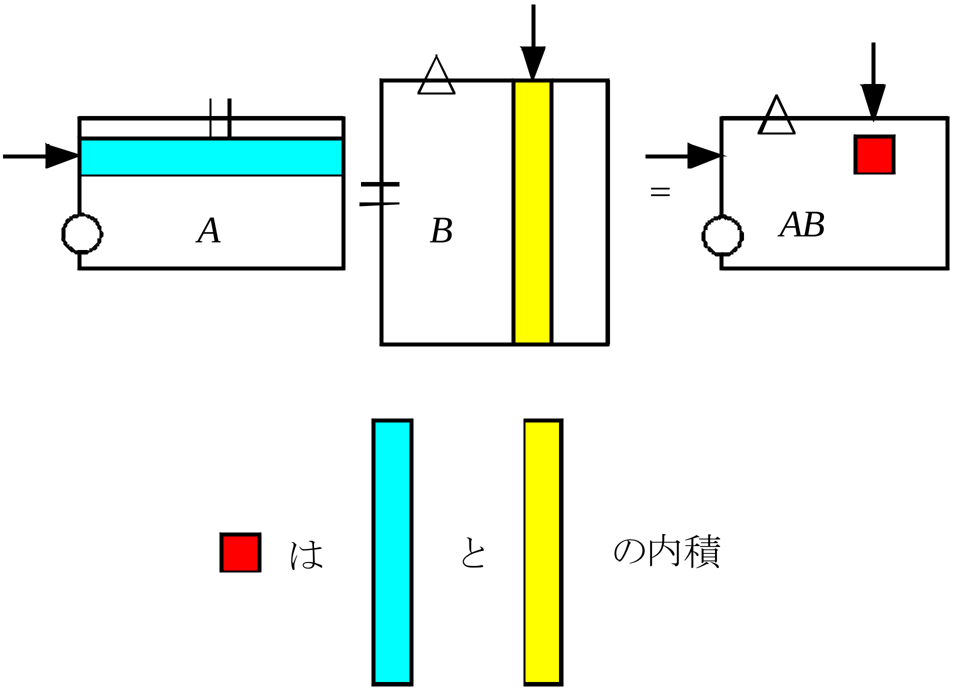


図　行列の積

例 1（行列の演算）：

(1) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 5 & -2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\times1+2\times3 & 4\times2+2\times1 \\ 1\times1+(-2)\times3 & 1\times2+(-2)\times1 \\ 0\times1+3\times3 & 0\times2+3\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ -5 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

(5) $5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ (6)

$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times2+1\times4 & 1\times1+1\times2 \\ 2\times2+3\times4 & 2\times1+3\times2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times1+1\times2 & 2\times1+1\times3 \\ 4\times1+2\times2 & 4\times1+2\times3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

例１の（3）と（4）を一般化する。次の正方行列Iを**単位行列**と呼ぶ。任意のm行n列行列Aに対して、$IA=A, AI=A$が成り立つ。ただし、Iを左からかける時にはm次の正方行列、右からかける時はn次の正方行列である。

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

すべての要素が0である行列を零行列と呼びOで表す。$A+O=O+A=A$が成り立つ。ただし、OはAと同じ大きさの行列である。

例１の（5）と（6）よりスカラー倍を行列の積としてあらわす場合は単位行列をそのスカラー倍した行列を利用すればよい。（7）と（8）よりABとBAは必ずしも等しくない。数字の積と違い、行列の積を計算する場合は順序を変えてはいけない。（9）より$A\neq, B\neq O$であっても$AB=O$となることがある。これも数字の世界ではなかったことである。1行n列行列は行ベクトル、m行1列行列は列ベクトルと一致する。

問 4-1：（=>解答）

（1）　$A=\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ の時、AB と BA を求めよ。

（2）　$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の時、A^2 と A^3 を求めよ。

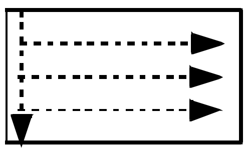
（3）　$A=\begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ の時、$A\boldsymbol{x}$ を求めよ。$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は何を意味するか？

（4）　AB と BA を求めよ（存在しなければ、その理由を述べよ）。ただし、次の通りである。$A=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

元の行列 A の行と列を入れ替えた行列を**転置行列**と呼び A^{T} と書く（下図参照）：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

元の行列



転置行列

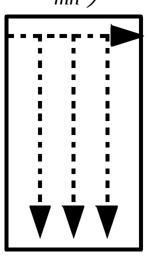


図　転置行列

これを利用して、問 4-1（1）の 1 つ目を書き直すと、
$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ となる。すなわち、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ の内積が行列の積として次のように表現できる：

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}$$

行列の積の転置行列に関して次が成り立つ：

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$$

例えば、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 27 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$、一方、
$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 13 \\ 7 & 27 & 9 \end{pmatrix}$ である。

問 4-1（3）を参考にすると、n 個の未知変数と m 本の式を含む次の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

は $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ とおくと

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表される。行列を利用することによって、連立 1 次方程式があたかも 1 変数の 1 次方程式のように表現できた。

n 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ において、左上から右下の対角線上にある成分、$a_{ii}\ (i=1,\ldots,n)$ を**対角成分**という。対角線より左下の成分がすべて 0 である行列を**上三角行列**、対角線より右上の成分がすべて 0 である行列を**下三角行列**という。上三角行列でありかつ下三角行列である行列を**対角行列**という。上三角行列と下三角行列をまとめて**三角行列**という。例えば、

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は上三角行列、$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ は下三角行列、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は対角行列である。

例 2（三角行列の和と積）：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \color{red}{0} & 0 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \color{red}{0} & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \color{red}{0} & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & 0 \\ 26 & 10 & 21 \end{pmatrix}$

例 2 の（1）と（2）を一般化すると、三角行列の和と積は、また、三角行列となる。（2）の赤色の要素に着目すると、次の一般化が出来る：

性質：

$$\left(\begin{array}{ccccccc} * & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & & & \vdots \\ \hline * & \cdots & \cdots & \color{red}{0} & 0 & & \vdots \\ \hline * & \cdots & \cdots & \cdots & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccccccc} \color{red}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \color{red}{\vdots} & \color{red}{\ddots} & \ddots & & & & \vdots \\ \color{red}{0} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{0} & 0 & & & \vdots \\ \hline * & \cdots & \cdots & * & 0 & & \vdots \\ \hline * & \cdots & \cdots & \cdots & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccccccc} \color{red}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \color{red}{\vdots} & \color{red}{\ddots} & \ddots & & & & \vdots \\ \color{red}{0} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{0} & 0 & & & \vdots \\ \hline \color{red}{0} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{0} & 0 & & \vdots \\ \hline * & \cdots & \cdots & \cdots & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{array}\right)$$

言葉で言うと、右の下三角行列の最初の r 行が 0 であり、左の下三角行列の $r+1$ 行 $r+1$ 列の要素が 0 ならば、これらの積は最初の $r+1$ 行が 0 である下三角行列となる。すなわち、0 である行が 1 つ増える。

例 3（基本変形の行列）：（1）**（行の交換）**次の行列 A に、単位行列 I の 2 行と 3 行を入れ替えた行列 P_{23} を左からかけると

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}, P_{23}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{23}A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

（2）**（列の交換）**行列 A に、単位行列 I の 1 列と 3 列を入れ替えた行列 P_{13} を右からかけると

$$AP_{13}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 & b_1 & a_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

（3）**（ある行の定数倍）**行列 A に、単位行列 I の 2 行を c 倍した行列 $P_2(c)$ を、左からかけると

$$P_2(c)A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ ca_2 & cb_2 & cc_2 & cd_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

（4）**（ある列の定数倍）**行列 A に、単位行列 I の 4 列を c 倍した行列 $P_4(c)$ を、右からかけると

$$AP_4(c)=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & cd_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & cd_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & cd_3 \end{pmatrix}$$

（5）　**（ある行の定数倍を別の行に加える）**行列Aに、単位行列Iの2行のc倍を1行に加えた行列（この操作により1行2列の要素がcとなるので）$P_{12}(c)$を、左からかけると

$$P_{12}(c)A=\begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+ca_2 & b_1+cb_2 & c_1+cc_2 & d_1+cd_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

（6）　**（ある列の定数倍を別の列に加える）**行列Aに、単位行列Iの2列のc倍を4列に加えた行列（この操作により2行4列の要素がcとなるので）$P_{24}(c)$を、右からかけると

$$AP_{24}(c)=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1+cb_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2+cb_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3+cb_3 \end{pmatrix}$$

「行列の行を交換する、ある行を定数倍する、ある行の定数倍を違う行に加える。または、行列の列を交換する、ある列を定数倍する、ある列の定数倍を違う列に加える。」は行列の**基本変形**と呼ばれる。例 2 より、基本変形を行列の積で表す場合、その基本変形をあらかじめ単位行列Iに行った行列$\left(P_{ij},P_i(c),P_{ij}(c)\right)$を（行に関する変形の場合は左から、列に関する変形の場合は右から）かければよいことが分かった。

行列Aを次のように列ベクトルが並んでいるとみなし、その列ベクトル$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$の 1 次結合からできる線形空間$\left\{A\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\right\}$の次元を行列$A$の**階数**と呼び、$\operatorname{rank}A$で表す。これは$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$の 1 次独立なものの個数と一致する（=>）。後の章で示すように行ベクトルの 1 次結合からできる線形空間の次

元、または、行ベクトルの1次ベクトルなものの個数とも一致する。すなわち、$\operatorname{rank} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{rank} A$ が成り立つ。

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ A\boldsymbol{x} \middle| \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \right\} = \left\{ x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \middle| x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n \right\rangle \subset \mathbb{R}^m$$

$$\operatorname{rank} A = \dim \left\{ A\boldsymbol{x} \middle| \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \right\} \left(= \dim \left\langle \boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n \right\rangle \right)$$

例 4：次の行列の階数を求めると、$\operatorname{rank} A = 3, \operatorname{rank} B = 4, \operatorname{rank} C = 3$ となる（問 3-1 参照）。また、単位行列 I （次数を n とする）に関しては、$\operatorname{rank} I = n$ となる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

また、次の行列において $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3$ が1次独立であり、$\boldsymbol{d}_4 = 4\boldsymbol{d}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_5 = \frac{2}{3}\boldsymbol{d}_2 + 2\boldsymbol{d}_3$ となるので、$\operatorname{rank} D = 3$ となる。

$$D = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1 & \boldsymbol{d}_2 & \boldsymbol{d}_3 & \boldsymbol{d}_4 & \boldsymbol{d}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

一般に、次のような行列の階数は r となる。

右の行列において、
赤の部分:非零の要素
白の部分:すべて0
水色の部分:何でもよい

この行列の階数はrである。

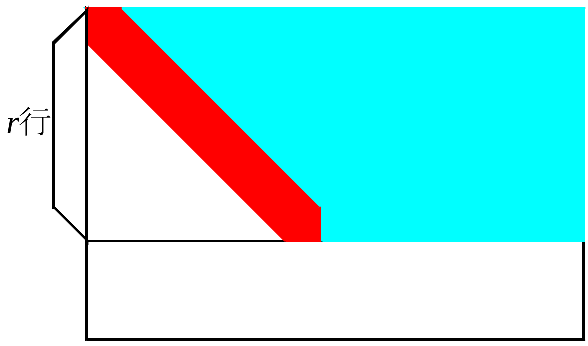


図　階数が容易に分かる行列

例 5（基本変形の行列の階数）：例 3 で登場した基本変形の行列（これは正方行列である。その次数は基本変形の行列をかける行列に依存する。）の階数を求める。次のように、すべて行列の次数に等しくなる。

$$\operatorname{rank} P_{23} = 3, \operatorname{rank} P_{13} = 4, \operatorname{rank} P_{2}(c) = 3\left(c \neq 0\right),$$
$$\operatorname{rank} P_{4}(c) = 4\left(c \neq 0\right), \operatorname{rank} P_{12}(c) = 3, \operatorname{rank} P_{24}(c) = 4$$

ただし、

$$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_{2}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_{4}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

$$P_{12}(c) = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_{24}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

一般的に、基本変形の行列（次数をnとする）の階数に関しては次のことが成り立つ：

$$\operatorname{rank} P_{ij} = n, \operatorname{rank} P_i(c) = n \left(c \neq 0\right), \operatorname{rank} P_{ij}(c) = n$$

行列の階数に関して次の定理が成り立つ。

定理： $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B$ （=>証明）

n 次の正方行列の階数が n の時、**正則行列**と呼ぶ。単位行列、基本変形の行列は正則行列である。

定理： A が（n 次の）正則行列ならば、任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は一意の解を持つ。また、その転置行列 A^{T} も正則行列である。（=>証明）

n 次の正方行列 A に対して $AX = XA = I$ となる n 次の正方行列 X が存在する時、 X を A の**逆行列**と呼び、 A^{-1} で表す。

例 6（単位行列と基本変形の行列の逆行列と転置行列）： 単位行列と基本変形の行列は次のような逆行列を持つ：

$$I^{-1} = I, P_{ij}^{-1} = P_{ij}, P_i(c)^{-1} = P_i\left(\frac{1}{c}\right)\left(c \neq 0\right), P_{ij}(c)^{-1} = P_{ij}(-c)$$

また、転置行列は次のようになる：

$$I^{\mathrm{T}} = I, P_{ij}^{\mathrm{T}} = P_{ij}, P_i^{\mathrm{T}}(c) = P_i(c), P_{ij}^{\mathrm{T}}(c) = P_{ji}(c)$$

問 4-2： 3 次の行列の場合に関して、例 6 の主張をチェックせよ。（=>解答）

定理： n 次の正方行列 A が逆行列を持つ必要かつ十分条件は A が正則行列であることである。（=>証明）

定理： n 次の正方行列 A が正則行列ならば、 $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} B$ である。（=>証明）

例 7（掃出し法による階数の求め方）： 行列の基本変形を利用して階数を求める。基本変形の行列は正則行列でありそれを左（右）からかけることは基本変形を行（列）に施すことであった。前定理によりこの基本変形を行（列）に施しても行列の階数は変わらない。従って、何回も基本変形を施し、階数が分かる行列に変形すれば、元の行列の階数が求められる。

（1）

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$ （1行の-2倍を3行に加える）$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$（2行の$-2$倍を3行に加える）$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$階数は2である。

（2）

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ （1行の-2倍を2行に加える）$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$（1行の$-1$倍を3行に加える）$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$（2行の$-1$倍を3行に加える）$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$[1]（3行の$-1$倍を1行に加える）$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$（3行の1倍を2行に加える）$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$階数は3、すなわち、正則行列である。最後の行列が単位行列であったので、以上の基本変形をまとめると、

$P_{23}(1)P_{13}(-1)P_{32}(-1)P_{31}(-1)P_{21}(-2)A=I$ となる。左から各行列の逆行列をかけて、$A=P_{21}(2)P_{31}(1)P_{32}(1)P_{13}(1)P_{23}(-1)$ となる。すなわち、正則行列Aが基本変形の行列の積として表された。

（3）

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ （1行の-2倍を2行に加える）$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$（1行の$-1$倍

---

[1] 行列の階数を求める場合、この時点で、3であることが分かるので、計算を止めてもよい。

を3行に加える）$\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$（2行の$-1$倍を3行に加える）$\to$

$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to$階数は2である（すなわち、正則行列ではない）。最後の行列の1行と3行を入れ替えると、0からなる行が1行目になる。以上の基本変形をまとめると、$P_{13}P_{32}(-1)P_{31}(-1)P_{21}(-2)A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$となる。

$Q=P_{13}P_{32}(-1)P_{31}(-1)P_{21}(-2)$とおけば、$Q$は正則行列の積だから正則行列となり、$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0*&*&**&*&*\end{pmatrix}$となる。すなわち、$QAQ^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0*&*&**&*&*\end{pmatrix}$となる。

例7の（2）を一般化して、次のことが成り立つ：

性質：正則行列は基本変形の行列$P_{ij},P_j(c),P_{ij}(c)\ (c\neq 0)$の積として表せる。

例7の（3）を一般化して、次のことが成り立つ：

性質：正則行列ではない正方行列Aは適当な正則行列Pを用いて

$PAP^{-1}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0*&*&**&*&*\end{pmatrix}$と表すことが出来る。

問 4-3：次の行列の階数を求めよ。（=>解答）

(1) $\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&2&1\\-1&2&2&3&2\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}1&1&0&1&2&0\\0&1&1&-2&-2&1\\1&1&1&-1&-1&3\\-1&-1&0&-1&-2&0\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 7 & 4 & 4 & -3 \\ 4 & 4 & 1 & -5 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -10 & 1 & -5 & 0 & 20 \\ 1 & -6 & 1 & -2 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

5 章　線形変換

例 1（家庭の資源利用）： 昨年度の、A、B、C の各家庭の 1 週間あたりの平均の水道使用量、米の使用量、灯油の使用量は次の表のようであった。水道、米、灯油の単価を各々 x_1, x_2, x_3 とする。A、B、C の各家庭の利用料金を各々 y_1, y_2, y_3 とする。

各家庭の使用量			
	水道（立方メートル）	米（キログラム）	灯油（リットル）
A	2	4	3
B	3	8	5
C	45	98	80

この時、次の関係が成り立つ。

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$$

ただし、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 5 \\ 45 & 98 & 80 \end{pmatrix}$ である。

この $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ への対応関係が線形変換と呼ばれるものである。

この例を参考にして $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形変換を定義する。写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ で次の条件を満たすものを $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への**線形変換**と呼ぶ（一般的には、線形写像と呼ばれるがここでは線形変換と呼ぶことにする）：

$$f\left(\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}\right) = \lambda f(\boldsymbol{x}) + \mu f(\boldsymbol{y}) \quad \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n ; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right)$$

$A\left(\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}\right) = \lambda A\boldsymbol{x} + \mu A\boldsymbol{y}$ が成立するので、例 1 の $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ への対応関係はこの意味で線形変換である。次の定理より、この逆も成り立つ。

定理： $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形変換 f は適切に m 行 n 列行列 A を決めれば、$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad \left(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\right)$ と表現できる。A は $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の f に

よる像を左から順に並べたもの、$A=\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}$である。(=>証明)

一般に、線形空間Uから線形空間Vへの写像$f:U\to V$で次の条件を満たすものをUからVへの線形変換と呼ぶ：

$$f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y) \quad (x,y\in U;\lambda,\mu\in\mathbb{R})$$

例 2（数列）： 数列の集合$\left\{(a_n)_{n=1,2,\ldots} \middle| a_n\in\mathbb{R}\,(n=1,2,\ldots)\right\}$からそれ自身への対応$f$を次のように定義する：$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\ldots),\boldsymbol{b}=(a_2,a_3,\ldots)$（$\boldsymbol{b}$の第$n$項は$\boldsymbol{a}$の第$n+1$項である）の時、$f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}$である。この$f$は線形変換である。

例 3（実数値関数）： 実数値関数の集合$\{g | g:D\to\mathbb{R}\}$（ただし、$D\subset\mathbb{R}$）からそれ自身への対応fを次のように定義する：$f(g)=g'$（g'はgの導関数）である。このfは線形変換である。

問 5-1： (=>解答)
(1)例 2 をチェックせよ。(2)例 3 をチェックせよ。

6 章　線形方程式

この章では未知数が n 個、式が m 本ある連立 1 次方程式の解を求める。

例 1（同次方程式）： 次の連立 1 次方程式を解く。

$$\begin{cases} x_1 & & & +x_4 & -3x_5 & =0 \\ & x_2 & & -2x_4 & -x_5 & =0 \\ & & x_3 & -x_4 & +2x_5 & =0 \end{cases}$$

この方程式を

$$\begin{cases} x_1 & = & -x_4 & +3x_5 \\ x_2 & = & 2x_4 & +x_5 \\ x_3 & = & x_4 & -2x_5 \\ x_4 & = & x_4 & \\ x_5 & = & & x_5 \end{cases}$$

と変形することにより

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が解であることが分かる。

A を m 行 n 列の行列、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ とする。右辺が $\mathbf{0}$ である連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は**同次方程式**と呼ばれる。例 1 を参考にして、この解を求める。

（1）もし、係数行列 A が次の形（左上方の単位行列の次数は r である）をしているならば、

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -s_{11} & \cdots & -s_{1n-r} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -s_{r1} & \cdots & -s_{rn-r} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank} A=r$ であり

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\begin{pmatrix} s_{11} \\ \vdots \\ s_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix} s_{12} \\ \vdots \\ s_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+\alpha_{n-r}\begin{pmatrix} s_{1n-r} \\ \vdots \\ s_{rn-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる（=>覚え方）。ここで

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix} s_{11} \\ \vdots \\ s_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix} s_{12} \\ \vdots \\ s_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ldots,\boldsymbol{u}_{n-r}=\begin{pmatrix} s_{1n-r} \\ \vdots \\ s_{rn-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく。$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_{n-r}$ の $r+1$行から n 行までの要素に注意する（1を一つ含み後は全部0であり、この1の位置がすべて異なる）とこれらが 1 次独立であるこ

とが分かる。また、 $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_{n-r} \boldsymbol{u}_{n-r} \ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R})$ と表現できる。これは**一般解**と呼ばれる。

（2）もし、係数行列 A が（1）の場合の形をしていないならば、行に関する基本変形を行い、（1）の場合の形に持っていけば良い。

例 2：次の同次連立 1 次方程式を解く。左辺の係数の行列だけを抜き出し、行に関する基本変形を行う。

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & +2x_5 & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & -3x_4 & +x_5 & = 0 \\ 3x_1 & -4x_2 & +7x_3 & +4x_4 & +9x_5 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & -4x_4 & -3x_5 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 7 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \text{（1行の}-3\text{倍を3行に加える）} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \text{（1行の}-1\text{倍を4行に加える）} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \text{（2行の1倍を1行に加える）} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \text{（2行の1倍を3行に加える）} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$ （2 行の -3 倍を 4 行に加える）$\to$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$ （3 行を $\dfrac{1}{2}$ 倍する）$\to$ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$ （3 行の -3 倍を1行に加える）$\to$ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$ （3 行の -1 倍を 2 行に加える）$\to$ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$ （3 行の 4 倍を 4 行に加える）$\to$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ となり、解は例 1 と一致する。

以上を定理の形でまとめる。

定理： A を m 行 n 列の行列とする。同次連立 1 次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解の集合を S とおけば、S は線形空間で $\dim S = n - \operatorname{rank} A$ となる。

$x=0$ （零ベクトル）ならば、明らかに $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ を満たすので、**自明な解**と呼ぶ。上記の定理より次の系が得られる。

系： A を n 次の正方行列とする。$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ が自明でない解 $(x \neq 0)$ を持つ必要かつ十分条件は $\operatorname{rank} A < n$ である。

ここで、行列の章の宿題であった次の定理を述べる。

定理： $\operatorname{rank} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{rank} A$ （=>証明）

例 3（非同次方程式）： （1）次の非同次連立 1 次方程式を解く。

$$\begin{cases} x_1 & & & +x_4 & -3x_5 & =2 \\ & x_2 & & -2x_4 & -x_5 & =1 \\ & & x_3 & -x_4 & +2x_5 & =-1 \end{cases}$$

例 1 と同様にこの方程式を次のように変形すると

$$\begin{cases} x_1 & = & 2 & -x_4 & +3x_5 \\ x_2 & = & 1 & +2x_4 & +x_5 \\ x_3 & = & -1 & +x_4 & -2x_5 \\ x_4 & = & 0 & +x_4 & \\ x_5 & = & 0 & & +x_5 \end{cases}$$

より解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

（2）次の 2 つの非同次連立 1 次方程式を解く。（a）と（b）において右辺の定数ベクトルの最後の要素が異なる。

（a） $$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & +2x_5 & =-1 \\ & x_2 & +x_3 & -3x_4 & +x_5 & =0 \\ 3x_1 & -4x_2 & +7x_3 & +4x_4 & +9x_5 & =-5 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & -4x_4 & -3x_5 & =3 \end{cases}$$

$$
(\mathrm{b})\quad \begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & +2x_5 & =-1 \\ & x_2 & +x_3 & -3x_4 & +x_5 & =0 \\ 3x_1 & -4x_2 & +7x_3 & +4x_4 & +9x_5 & =-5 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & -4x_4 & -3x_5 & =2 \end{cases}
$$

左辺の係数の行列（Aとおく）の右に右辺の定数ベクトル（$\boldsymbol{b}$ とおく）を置いた行列（$\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$である）に、例 2 とまったく同様の行に関する基本変形を行う。最初と最後の結果は次のようになる：

$$
(\mathrm{a})\ :\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 7 & 4 & 9 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & -4 & -3 & 3 \end{array}\right) \to\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
(\mathrm{b})\ :\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 7 & 4 & 9 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & -4 & -3 & 2 \end{array}\right) \to\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)
$$

この 2 つの決定的な差は赤字で示した右下の要素である。（a）の方は「0」で（b）の方は「非零」である。（a）の方は$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$であり、（b）の方は$\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$である。これにより（a）の解は(1)と同じで

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

となる。一方、（b）の方は上の結果を方程式の形に書き直して

$$\begin{cases} x_1 & & & +x_4 & -3x_5 & =2 \\ & x_2 & & -2x_4 & -x_5 & =1 \\ & & x_3 & -x_4 & +2x_5 & =-1 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +0x_5 & =-1 \end{cases}$$

より、解が存在しないことが分かる。

以上を定理の形でまとめる：

定理： Aをm行n列の行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$とする。連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$が解を持つための必要かつ十分条件は$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$である。

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = r$の時、行列$\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$に、行に関する基本変形（必要ならば、列の交換）を行うことにより次の形もって行くことができる。

$$\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -s_{11} & \cdots & -s_{1n-r} & t_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -s_{r1} & \cdots & -s_{rn-r} & t_r \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

従って、

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ \vdots \\ s_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ \vdots \\ s_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r} = \begin{pmatrix} s_{1n-r} \\ \vdots \\ s_{rn-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくことにより、解は $x = \boldsymbol{t} + \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$ $\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-r} \in \mathbb{R}\right)$ となる。（列の交換を行った場合は、変数も交換する。）ここで、$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_{n-r}$ は1次独立で同次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解であり、$\boldsymbol{t}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解（**特殊解**と呼ばれる）である。すなわち、非同次連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ は同次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解 $\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$ と $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の特殊解 $\boldsymbol{t}$ の和となっている。

一般的に、次が成り立つ。

定理：非同次連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つとする。そのとき、その解は同次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解と $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の特殊解（上述の特殊解 $\boldsymbol{t}$ 以外でも良い）の和である。（=>証明）

例4：次の連立1次方程式を解く。

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & +2x_5 & =1 \\ 2x_1 & -2x_2 & +5x_3 & -2x_4 & +5x_5 & =0 \\ x_1 & -x_2 & +4x_3 & -x_4 & -x_5 & =3 \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$ （1行の -2 倍、-1 倍を、各々、2行、3行に加える）$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$ （2行を -1 倍する）$\to$

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$ （2行の -3 倍、-1 倍を、各々、1行、3行に加える）$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$ （3行を $-\dfrac{1}{2}$ 倍する）$\to$

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ （3行の -5 倍、1倍を、各々、1行、2行に加え

る）$\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ここで、2 列と 3 列を交換後、3 列と 5 列を交換すれば、左に単位行列が来る形になる。これを方程式の形式で書くと、

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_2 \qquad\qquad -x_4 \qquad\quad = -5 \\ \qquad\qquad\quad x_3 \qquad\qquad\qquad\quad = 2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_5 \quad = 0 \end{cases}$$

基本ベクトルがある列に対応する変数 x_1, x_3, x_5 を左辺に、それ以外の変数を右辺に移動させ、揃えると、

$$\begin{cases} x_1 & = & -5 & +x_2 & +x_4 \\ x_2 & = & & x_2 & \\ x_3 & = & 2 & +0x_2 & +0x_4 \\ x_4 & = & & & x_4 \\ x_5 & = & 0 & +0x_2 & +0x_4 \end{cases}$$

従って、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。

また、$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$の1行を$-1$倍して、$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

と見ると、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。また、

$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ と見ると、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。すなわち、解の表現方法は一意ではないことが分かる。

問 6-1：次の連立 1 次方程式を解け。（=>解答）

（1）
$$\begin{cases} x_3 + 2x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_4 - 3x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 9x_4 - 7x_5 = -2 \end{cases}$$

（2）
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

（3）
$$\begin{cases} x + y + u + 2v = 0 \\ y + z - 2u - 2v = 1 \\ x + y + z - u - v = 3 \\ -x - y - u - 2v = 0 \end{cases}$$

（4）
$$\begin{cases} x - y - u - 2v = 1 \\ x - y + z - 3v = 0 \\ 2x - 2y + z - u - 5v = 1 \end{cases}$$

（5）
$$\begin{cases} x_3 + 12x_4 - x_5 = 33 \\ -6x_1 + 3x_2 - 3x_4 + 2x_5 = -63 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_4 - x_5 = 52 \\ 3x_1 - 3x_3 - 12x_4 + 2x_5 = -3 \end{cases}$$

(6) $\begin{cases} \quad\ y & +2z & -u & =5 \\ x & +2y & -z & +u & =5 \\ 2x & +y & -2z & +2u & =10 \end{cases}$

例 5（逆行列の求め方）： Aをn次の正方行列とする。Aが正則行列ならば逆行列が存在する。逆行列を$X=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$とおけば、$A\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{e}_j\ (j=1,\dots,n)$となる。ただし、$\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$は基本ベクトルである。従って、この$n$個の非同次連立 1 次方程式を解けばよい。具体的にはAの右側に基本ベクトル$\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$を並べた行列$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}$に行に関する基本変形を行い、$\begin{pmatrix} I & Y \end{pmatrix}$となった時点で答えが求まり、$A^{-1}=Y$となる。

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$の逆行列を求める。

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ （1行の-1倍を 2 行に加える）→

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ （1行の-2倍を 3 行に加える）→

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$ （2 行を-1倍する）→

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$ （2 行の-2倍を1行に加える）→

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$ （2 行の 4 倍を 3 行に加える）→

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \text{（3行を}-1\text{倍する）} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\text{（3行の}-1\text{倍を1行に加える）} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right) \text{（3行の}-1\text{倍を}$$

$$\text{2行に加える）} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right) \text{従って、} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{と}$$

なる。

問 6-2：次の行列に逆行列があればそれを求めよ。 (=>解答)

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7章　行列式

行列式とは正方行列に実数を対応させる関数である。この行列式のおかげで正則行列のチェックが容易になり逆行列も陽に書き下すことができるようになる。

正方行列の集合をMとおく。まず、次の性質を満たす関数$\det : M \to \mathbb{R}$を定義する。

（1）　$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix} = 1$

（2）　$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \lambda\boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$

（3）

$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$

（4）

$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$

ここで、$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_j \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$、$\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$は$\mathbb{R}^n$の基本ベクトルであり、$\det$の引数は$n$次元列ベクトルを$n$個並べたものである。

まず、関数$\det$のさらなる性質を列挙する：（=>証明）

（5）　$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix} = 0$（2つの列が同じであれば、0）

（6）

$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \lambda\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$

（ある列の定数倍を別の列に加えても変わらない）

（7）　$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix} = 0$（ある列が$\boldsymbol{0}$ならば、0）

$A = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix} \in M, \boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$の時、$A$の**行列式**を

$|A| = \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$と定義する。

例1（2次と3次の行列式）：$\det$の（2）と（3）、及び（1）と（5）を利用して計算する。

2 次の行列式：

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{11}a_{12}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{21}a_{22}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}
$$

3 次の行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\left(a_{12}\begin{vmatrix} 1 & 1 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{vmatrix} \right)$$

$$+ a_{21}\left(a_{12}\begin{vmatrix} 0 & 1 & a_{13} \\ 1 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 1 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 1 & 0 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{vmatrix} \right)$$

$$+ a_{31}\left(a_{12}\begin{vmatrix} 0 & 1 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 1 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 1 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 1 & 1 & a_{33} \end{vmatrix} \right)$$

$$= a_{11}\left(a_{22}\left(a_{13}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + a_{32}\begin{vmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{vmatrix} \right)$$

$$+ a_{21}\left(a_{12}\left(a_{13}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + a_{32}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 1 & 0 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{vmatrix} \right)$$

$$+ a_{31}\left(a_{12}\left(a_{13}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + a_{22}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 1 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \right)$$

$$= a_{11}\left(a_{22}\left(a_{33}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + a_{32}\left(a_{13}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \right)$$

$$+ a_{21}\left(a_{12}\left(a_{33}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + a_{32}\left(a_{13}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \right)$$

$$+ a_{31}\left(a_{12}\left(a_{23}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right) + a_{22}\left(a_{13}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \right)$$

さらに計算を続けると、

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22}\left(a_{33}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + a_{32}\left(a_{23}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \right)
$$

$$
+a_{21}\left(a_{12}\left(a_{33}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + a_{32}\left(a_{13}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \right)
$$

$$
+a_{31}\left(a_{12}\left(a_{23}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right) + a_{22}\left(a_{13}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right) \right)
$$

$$
= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}
$$

$$
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
$$

下図を参照に記憶するとよい。

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
$$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
$$

赤方向の符号はプラス
水色方向の符号はマイナス

図　2 次と 3 次の行列式

問 7-1：次の行列式を求めよ。　(=>解答)

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

行列式の性質を列挙する：

性質：次が成り立つ。（=>証明）

（1） $|AP_j(\lambda)| = \lambda|A|, |AP_{ij}| = -|A|, |AP_{ij}(\lambda)| = |A|$（ある列を定数倍すれば、定数倍される。列を交換すれば、符号が変わる。ある列の定数倍を別の列に加えても変わらない。）

（2） $|P_j(\lambda)| = \lambda, |P_{ij}| = -1, |P_{ij}(\lambda)| = 1, |P_j^{\mathrm{T}}(\lambda)| = \lambda, |P_{ij}^{\mathrm{T}}| = -1, |P_{ij}^{\mathrm{T}}(\lambda)| = 1$であり、$|AP_j(\lambda)| = |A||P_j(\lambda)|, |AP_{ij}| = |A||P_{ij}|, |AP_{ij}(\lambda)| = |A||P_{ij}(\lambda)|$である。

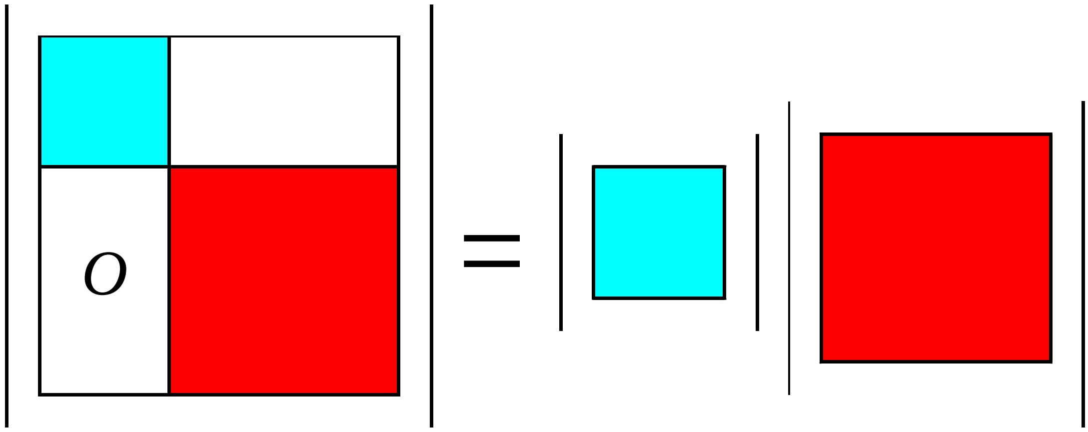
（3） Aが正則行列でなければ、$|A| = 0$である。また、Aが正則行列ならば、$|A| \neq 0$である。従って、Aが正則行列であるための必要かつ十分条件は$|A| \neq 0$である。

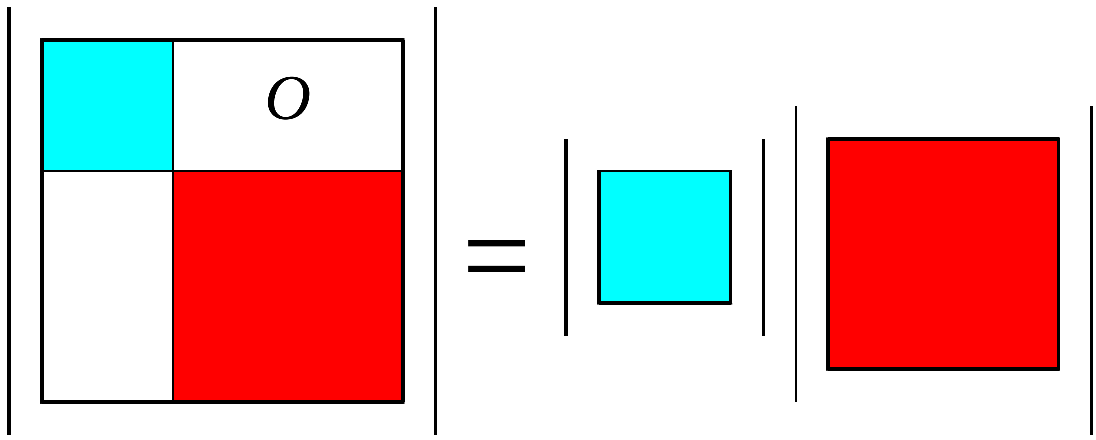
（4） $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$（転置行列の行列式は元の行列式と一致する。）

（5） $|AB| = |A||B|$

（6） $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{22}|$（下図を参照。右上に零行列があっても同じ。）

（7） 特に、$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$（三角行列の行列式は対角要素の積である。右上が0の三角行列に関しても同じ。）





実際に行列式の計算を行うには、上記の性質の（5）より $|P_i(\lambda)A| = \lambda|A|, |P_{ij}A| = -|A|, |P_{ij}(\lambda)A| = |A|$ を利用して、（7）の形に変形すればよい。すなわち、行に関する基本変形を利用して三角行列を作ればよい。ただし、行を交換すると求めるものの符号が変わり、行を定数倍すると求めるものがその定数倍されることに注意する。また、（1）より列に関する基本変形に関しても同様のことが成り立つ。

例 2 : （1）と（2）の行列式を計算し、（3）をチェックする。

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 1 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$（1行の−2倍を3行に加える）→ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

（2行の1倍を3行に加える）→ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$（2行の$-\dfrac{2}{3}$倍を4行に加え

る）→ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -\dfrac{8}{3} & \dfrac{4}{3} \end{pmatrix}$（3行の$\dfrac{8}{15}$倍を4行に加える）→ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{4}{15} \end{pmatrix}$

となる。この行列の行列式は$1\times3\times5\times\left(-\dfrac{4}{15}\right)=-4$であり、途中で行の交換、行の定数倍を利用していないので、求める行列式は-4となる。

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$（1行と2行を交換する）→ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$（1行の−1

倍を4行に加える）→ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$（2行の−1倍を3行に加える）→

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$（2行の−4倍を4行に加える）→ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -6 \end{pmatrix}$（3行

の$-\dfrac{9}{2}$倍を4行に加える）$\to\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&2&1\\0&0&-2&0\\0&0&0&-6\end{pmatrix}$となる。この行列の行列式は

$1\times1\times(-2)\times(-6)=12$であり、途中で行の交換のみを1回利用しているので、求める行列式は-12となる。

（3） 行の交換と列の交換を利用して3行2列の要素1を1行1列へ移動させることを考える。結果の公式が容易に導けるように、隣同士の行または列の交換を繰り返し利用して目的を果たす。

$\begin{pmatrix}a_{11}&0&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&0&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&1&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&0&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$（2行と3行を交換する）$\to\begin{pmatrix}a_{11}&0&a_{13}&a_{14}\\a_{31}&1&a_{33}&a_{34}\\a_{21}&0&a_{23}&a_{24}\\a_{41}&0&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$（1行と2行を交換する）$\to\begin{pmatrix}a_{31}&1&a_{33}&a_{34}\\a_{11}&0&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&0&a_{23}&a_{24}\\a_{41}&0&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$（1列と2列を交換する）$\to$

$\begin{pmatrix}1&a_{31}&a_{33}&a_{34}\\0&a_{11}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{21}&a_{23}&a_{24}\\0&a_{41}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$となり、性質の（6）よりこの行列の行列式は

$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{23}&a_{24}\\a_{41}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$となる。行の交換の回数＝$3-1$、列の交換の回数＝$2-1$、であり$(-1)^{3-1+2-1}=(-1)^{3+2}$より、求める結果が得られる。

問 7-2 : 次の行列式を計算せよ。 (=>解答)

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 9 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

例 2 の（3）を一般化した次が成り立つ：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & 0 & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & 1 & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & 0 & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ において、上記の右辺を a_{ij} の**余因子**と呼び A_{ij} と書く：

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A_{ij} は A の第 i 行と第 j 列には依存しないことに注意する！

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{ij}=(-1)^{i+j}\left|\begin{array}{l} A\text{の第 } i \text{ 行と第} \\ j \text{ 列を取り除い} \\ \text{て得られる } n-1 \\ \text{次の行列式} \end{array}\right|$$

例 3：次に示すように 3 次の行列式を 3 個の 2 次の行列式の和と表現できる。

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 1 & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}\end{aligned}$$

上の例は 3 次の行列式を 2 列によって展開したものである。一般に次が成り立つ。

行列式の展開（列による展開）：

$$|A| = a_{1j}A_{1j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$$

同様のことが行に関しても成立する。

行列式の展開（行による展開）：

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

例 4：（1）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ を 3 行で展開する。（0 が多い行、または、列で展開する方が計算が楽である。ここでは、3 行で展開する。）

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -(4+2-3)-(3+8-2) = -12$$

となる。

（2）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & x_3 \end{vmatrix}$ を 3 列で展開する。$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とする。A_{ij} は A の第 i 行と第 j 列には依存しないことに注意して、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & x_3 \end{vmatrix} = x_1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + x_2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + x_3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$= x_1A_{13} + x_2A_{23} + x_3A_{33}$$

$\boldsymbol{x}$ が A の第 3 列の時、これは上記の列による展開の公式である。$\boldsymbol{x}$ が A の第 1 列または第 2 列の時、左辺は同じ列を含むので 0 となるので、右辺も 0 となる。すなわち、

$$
\begin{aligned}
a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}&=0\\
a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+a_{32}A_{33}&=0
\end{aligned}
$$

まとめると、

$$
\begin{aligned}
A_{13}a_{11}+A_{23}a_{21}+A_{33}a_{31}&=0\\
A_{13}a_{12}+A_{23}a_{22}+A_{33}a_{32}&=0\\
A_{13}a_{13}+A_{23}a_{23}+A_{33}a_{33}&=|A|
\end{aligned}
$$

となる。

一般的に次が成り立つ：

$$
\sum_{k=1}^{n}A_{ki}a_{kj}=A_{1i}a_{1j}+\cdots+A_{ni}a_{nj}=\begin{cases}|A| & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}
$$

$$
\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A| & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}
$$

Aの**余因子行列**$\mathrm{adj}\,A$を次のように定義する：

$$
\mathrm{adj}\,A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}
$$

余因子行列を利用して上記の結果を書くと次のようになる：

$$
A(\mathrm{adj}\,A)=(\mathrm{adj}\,A)A=\begin{pmatrix}|A| & 0 & \cdots & 0\\ 0 & |A| & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & |A|\end{pmatrix}=|A|I
$$

Aが正則行列$(|A|\neq 0)$の時、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

と陽に逆行列が記述できる。

例 5：次の逆行列を求める。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0\times0\times0+1\times(-1)\times1+2\times2\times1-2\times0\times1-1\times2\times0-0\times(-1)\times1=3$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

より、$A = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ となる。

問 7-3：次の行列の逆行列を求めよ。 (=>解答)

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

クラメールの公式： n 個の未知数、n 個の式を含む非同時連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ において A が正則行列の時、解は次の公式で与えられる：

$$x_j=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}\ (j=1,\ldots,n)$$

ただし、分子は A の j 列を $\boldsymbol{b}$ に置き換えたものである。（=>証明）

例 6： 次の連立 1 次方程式をクラメールの公式を利用して解く。

$$\begin{cases} \quad\ \ x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 \quad\ \ - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 \quad\ \ = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0+1\times(-1)\times(-1)+2\times1\times1-0-0-0}{3} = 1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0+0+2\times2\times(-1)-2\times1\times1-0-0}{3} = -2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0+1\times(-1)\times1+2\times2\times1-0-0-0}{3} = 1$$

となる。

問 7-4：次の連立 1 次方程式をクラメールの公式を利用して解け。 (=>解答)

(1) $\begin{cases} x & +y & & =1 \\ 2x & +2y & +z & =0 \\ x & +3y & +z & =-1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} -x & & +2z & & =3 \\ 2x & +2y & & +u & =0 \\ & 2y & +z & +u & =0 \\ x & +y & +2z & +u & =1 \end{cases}$

n 次の正方行列 A が正則行列ではない $(\operatorname{rank} A < n)$ ことを行列式で表すと $|A| = 0$ であった。これを利用して線形方程式の章の系 (=>) を書き直すと

系： A を n 次の正方行列とする。$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が自明でない解 $(x \neq 0)$ を持つ必要かつ十分条件は $|A|=0$ である。

8 章　固有値とその応用

この章では正方行列の固有値を導入し、いくつかの応用を紹介する。

n 次の正方行列 A の**固有値**とは「零ベクトルではない $\boldsymbol{x}$ に対して、$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ となる」λ である。また、$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x}\,(\neq\boldsymbol{0})$ を固有値 λ に属する**固有ベクトル**と呼ぶ。

$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$ は $(\lambda I-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\ (\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$ と書けるので、行列式の章の系（=>）を利用すると、固有値 λ を求めるには $|\lambda I-A|=0$、すなわち、次の方程式を解けばよい。

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

ただし、$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ である。λ の n 次多項式

$f_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$ を A の**固有多項式**、$f_A(\lambda)=0$ を**固有方程式**と呼ぶ。

例：次の行列の固有値と固有ベクトルを求める：

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $B=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$　(3) $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(1) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4 = 0$を解くと、$\lambda = 3, -1$となる。従って、$A$の固有値は$3$と$-1$である。まず、固有値$3$に属する固有ベクトルを求める。方程式$(3I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$を解く。左辺の係数の行列のみを書いて、

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$（1行を$\frac{1}{2}$倍する。1行の2倍を2行に加える）$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。これより、固有値$3$に属する固有ベクトルは$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$となる。固有値$-1$に属する固有ベクトルは、同様に計算すると、$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$（1行を$-\frac{1}{2}$倍する。1行の2倍を2行に加える）$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$となるので、$\beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$となる。

(2)

$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 6 & -3 \\ 2 & \lambda-1 & 3 \\ 2 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0$を解くと、$\lambda = 1, 2$となる。従って、$B$の固有値は1（2重解）と2である。固有値1に属する固有ベクトルを求める。方程式$(1I - B)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$の左辺の係数の行列のみを書いて、$\begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$（1行を$-\frac{1}{3}$倍する。1行の$-2$倍を2行と3行に加える）$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$（2行を$\frac{1}{4}$倍する。2行の2倍を1行に加える）$\rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。これより、固有値1に属する固有ベクトルは$\alpha\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$となる。

固有値 2 に属する固有ベクトルは、同様に計算すると、$\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$（1 行を$-\dfrac{1}{2}$倍する。1 行の$-2$倍を 2 行と 3 行に加える）→$\begin{pmatrix} 1 & -3 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$（2 行を$\dfrac{1}{7}$倍する。2 行の 3 倍を 1 行に加える。2 行の-2倍を 3 行に加える。）→

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$となるので、$\beta\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$となる。

(3) $|\lambda I - C| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+3) = 0$ を解くと、$\lambda = 1, -3$ となる。従って、C の固有値は 1（2 重解）と-3である。固有値 1 に属する固有ベクトルを求める。方程式$(1I - C)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の左辺の係数の行列のみを書いて、$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$（1 行と 2 行を交換する。1 行を$\dfrac{1}{2}$倍する。1 行の 1 倍を 3 行へ加える。）→$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。これより、固有値 1 に属する固有ベクトルは$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$となる。固有値$-3$に属する固有ベクトルは、同様に計算

すると、$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ （1行を$-\dfrac{1}{4}$倍する。2行を$-\dfrac{1}{2}$倍する。）→

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ （2行の2倍を3行に加える。）→ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるので、

$\gamma\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

問 8-1：次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。 （=>解答）

（1） $\begin{pmatrix} 16 & -18 & 15 \\ 0 & -1 & -1 \\ -10 & 12 & -9 \end{pmatrix}$ （2） $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ （3） $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ （4） $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ （5） $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

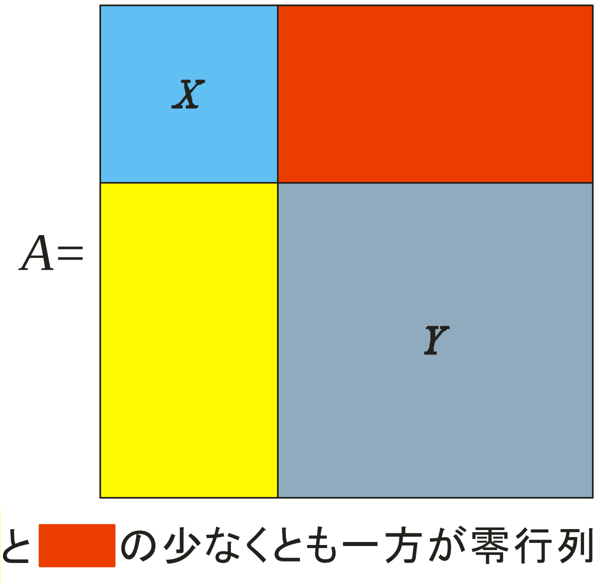
固有多項式に関して次のことが成り立つ。

定理：

（1） $A=\begin{pmatrix} X & Z \\ O & Y \end{pmatrix}$ または $A=\begin{pmatrix} X & O \\ Z & Y \end{pmatrix}$ ならば、 $f_A(\lambda)=f_X(\lambda)f_Y(\lambda)$ である。ただし、X,Y は正方行列、O は零行列である（下図参照）。

（2） $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_1 \end{pmatrix}$ ならば、

$f_A(\lambda)=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}-\cdots-a_{n-1}\lambda-a_n$ である。 （=>証明）



$f_A(\lambda) = f_X(\lambda) f_Y(\lambda)$ となる。

例：$A = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 9 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ の固有多項式を上述の定理を繰返し利用して求める。$X = (1), Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 9 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば、$A = \begin{pmatrix} X & * \\ O & Y \end{pmatrix}$ となるので、上述の定理の（1）より、$f_A(\lambda) = f_X(\lambda) f_Y(\lambda)$ である。更に、$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば、$Y = \begin{pmatrix} U & O \\ * & V \end{pmatrix}$ となるので、$f_Y(\lambda) = f_U(\lambda) f_V(\lambda)$ である。$f_X(\lambda) = \lambda - 1$ である。上述の定理の（2）より、$f_U(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ と $f_V(\lambda) = \lambda^3 - 0\lambda^2 - 3\lambda + 2 = \lambda^3 - 3\lambda + 2$ が得られ

る。以上をまとめると、
$f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda^3-3\lambda+2)=(\lambda-1)^5(\lambda+2)$となる。

問 8-2：次の行列の固有多項式を求めよ。（=>解答）

（1）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$（2）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

定理：Aを正方行列、Pを正則行列とすると、$f_A(\lambda)=f_{PAP^{-1}}(\lambda)$である。（=>証明）

次の例が示すように、上述の 2 つの定理を利用すれば、正方行列の固有多項式を求めることができる。

例：$A=\begin{pmatrix} -1 & -7 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 7 & -2 & -4 \end{pmatrix}$の固有多項式を行列の基本変形を利用して求める。目標は 2 つ前の定理（2）の形である。
1 列の 2 行から下の方へ見ていき、非零の要素を探す。今の場合、2 行 1 列の要素が非零の要素 2 である。この要素を 1 にするために第 2 行を$\dfrac{1}{2}$倍する（$P_2\left(\dfrac{1}{2}\right)$を左からかける）。$P_2\left(\dfrac{1}{2}\right)$の逆行列$P_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=P_2(2)$を右からかける（第 2 列を 2 倍する）。$A=\begin{pmatrix} -1 & -7 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 7 & -2 & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -1 & -14 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 14 & -2 & -4 \end{pmatrix}$
この 2 行 1 列の 1 を利用して、1 行 1 列の-1を 0 にする：第 2 行の 1 倍を第 1 行に加える（$P_{12}(1)$を左からかける）。$P_{12}(1)$の逆行列$P_{12}(1)^{-1}=P_{12}(-1)$を右

からかける（第 1 列の -1 倍を第 2 列に加える）。

$$\begin{pmatrix} -1 & -14 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 14 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -7 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 12 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

2 行 1 列の 1 を利用して、4 行 1 列の 2 を 0 にする：第 2 行の -2 倍を第 4 行に加える（$P_{42}(-2)$ を左からかける）。$P_{42}(-2)$ の逆行列 $P_{42}(-2)^{-1} = P_{42}(2)$ を右からかける（第 4 列の 2 倍を第 2 列に加える）。

$$\begin{pmatrix} -1 & -14 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 14 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1 列において、2 行の要素が 1 となり、他の行の要素が 0 となった。
次に 2 列へ進む。2 列の 3 行から下の方へ見ていき、非零の要素を探す。今の場合、非零の要素がない。このときは 2 つ前の定理の（1）が適用できる。
次に 3 列へ進む。3 列の 4 行から下の方へ見ていき、非零の要素を探す。今の場合、4 行 3 列の要素が非零の要素 -2 である。この要素を 1 にするために、第 4 行を $-\dfrac{1}{2}$ 倍する（$P_4\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ を左からかける）。$P_4\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ の逆行列 $P_4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = P_2(-2)$ を右からかける（第 4 列を -2 倍する）。

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

以上をまとめる。$P = P_2\left(\dfrac{1}{2}\right)P_{12}(1)P_{42}(-2)P_4\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ とおけば、

$$PAP^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ となるので、

$f_A(\lambda) = f_{PAP^{-1}}(\lambda) = \left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right)\left(\lambda^2 - 4\right)$ となる。

問 8-3：次の行列の固有多項式を求めよ。（=>解答）

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Aを正方行列、$g(x) = g_k x^k + g_{k-1}x^{k-1} + \cdots + g_1 x + g_0$ をk次多項式とする。この時、$g(A) = g_k A^k + g_{k-1}A^{k-1} + \cdots + g_1 A + g_0 I$ と定義する。$h(x)$ も多項式とすると、$g(A)h(A) = h(A)g(A)$ となる。すなわち、かける順序に寄らない。

定理（ハミルトン‐ケーリー）：正方行列Aに対して $f_A(A) = O$（零行列）が成り立つ。（=>証明）

例：$B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ とおけば、$f_B(\lambda) = |\lambda I - B| = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$ であった（=>）。従って、$B^3 - 4B^2 + 5B - 2I = O$ が成り立つ。例えば、$\lambda^5 = (\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2)(\lambda^2 + 4\lambda + 11) + 26\lambda^2 - 47\lambda + 22$ より、

$$\begin{aligned} B^5 &= f_B(B)(B^2 + 4B - 11I) + 26B^2 - 47B + 22I = 26B^2 - 47B + 22I \\ &= 26\begin{pmatrix} 22 & -18 & 27 \\ -4 & 1 & -6 \\ -14 & 12 & -17 \end{pmatrix} - 47\begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} + 22\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 406 & -186 & 561 \\ -10 & 1 & -15 \\ -270 & 124 & -373 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

問 8-4：ハミルトン-ケーリーの定理を利用して次の行列の 5 乗を求めよ。 (=>解答)

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

定理（固有ベクトルの 1 次独立性）：相異なる固有値に属する固有ベクトルは 1 次独立である。 (=>証明)

正方行列 A が**対角化可能**であるとは、適当な正則行列 P により $P^{-1}AP$ が対角行列になる時をいう。これに関して次の定理が成り立つ。

定理（正方行列の対角化）：n 次の正方行列 A が対角化可能である必要かつ十分条件は n 個の 1 次独立な固有ベクトルが存在することである。この n 個の 1 次独立な固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ とし $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$ とおけば、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる。ただし、$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ は A の固有値で $\boldsymbol{p}_i$ は λ_i の固有ベクトルである。 (=>証明)

例：次の正方行列が対角化可能か否かを調べ、可能な場合は対角化する：

(1) $\begin{pmatrix} 16 & -18 & 15 \\ 0 & -1 & -1 \\ -10 & 12 & -9 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

（1） $A=\begin{pmatrix} 16 & -18 & 15 \\ 0 & -1 & -1 \\ -10 & 12 & -9 \end{pmatrix}$ （とおく）の固有値は1と2と3であり、各々に属する固有ベクトルは $\alpha\begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\beta\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ と $\gamma\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ であった（=>）。定理（固有ベクトルの1次独立性）によりこれら3つのベクトルは1次独立である。従って、$P=\begin{pmatrix} 16 & 9 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ -10 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ とおけば、$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ -5 & 2 & -7 \\ 5 & -3 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$、

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となり、A は対角化可能である。

（2） $B=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ （とおく）の固有値は1（2重解）と2であり、固有値1に属する固有ベクトルは $\alpha\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$、固有値2に属する固有ベクトルは、

$\beta\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ であった（=>）。固有値 1 に属する 2 個の 1 次独立な固有ベクトルを求めることができないので、B は対角化は不可能である。

(3) $A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\-1&2&-1\\1&0&3\end{pmatrix}$（とおく）の固有値は 1 と 2（2 重解）であり、各々に属する固有ベクトルは $\alpha\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ と $\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ であった（=>）。

$P=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ とおくと、$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-1&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ となり、A は対角化可能である。

問 8-5：次の正方行列が対角化可能かどうか調べ、可能な場合は対角化せよ。 (=>解答)

(1) $\begin{pmatrix}1&-3&0\\-2&1&-3\\0&2&1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

（実数を要素として持つ）正方行列 A の転置行列が自分自身と等しい時、すなわち、$A^{\mathrm{T}}=A$ が成り立つ時、A を**対称行列**という。（実数を要素として持つ）正方行列 A が $A^{\mathrm{T}}A=I$ を満たす時、A を**直交行列**という。言い換えれば、A が直交行列であるとは $A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$ が成り立つことである。対称行列の固有値と固有ベクトルに関して次の定理が成り立つ。

定理（対称行列の固有値と固有ベクトル）： (=>証明)
(1) 対称行列の固有値はすべて実数である。
(2) 対称行列の相異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。

定理（対称行列の直交行列による対角化）： n 次の対称行列 A は適当な直交行列 U によって対角化可能である。すなわち、A の n 個の固有値を $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ とし、各々に属する（要素が実数である）固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ を、長さが 1 で互いに直交するようにできる。$U=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n\end{pmatrix}$ とおけば、

$$U^{-1}AU=U^{\mathrm{T}}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

となる。（=>証明）

例： 次の対称行列を直交行列で対角化する：

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$（とおく）の固有値は 3 と -1 で、各々に属する固有ベクトルは $\alpha\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ と $\beta\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ であった（=>）。定理（対称行列の固有値と固有ベクトル）の (2) より、これらは直交する。α と β を調整し、長さを 1 にすると、$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ になる。従って、$U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とおけば、

$$U^{-1}AU=U^{\mathrm{T}}AU=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

となる。

(2) $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$（とおく）の固有値と固有ベクトルを求める。

$$f_B(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-2&-1\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\left((\lambda-2)^2-1\right)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

より、固有値は 1 と 2 と 3 である。固有値 1 に属する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$（1 行を -1 倍する。2 行を -1 倍する。）$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$（2 行の 1 倍を 3 行に加える。）$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ より、$\alpha\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ である。固有値 2 に属する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$（2 行を -1 倍する。3 行を -1 倍する。）$\to\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ より、$\beta\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ である。固有値 3 に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$（2 行の 1 倍を 3 行に加える。）$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ より、$\gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ である。定理（対称行列の固有値と固有ベクトル）の（2）これら 3 つの固有ベクトルは直交する。α と β と γ を調整し、長さを 1 にすると、$\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

と$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$となる。従って、$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$とおけば、

$$U^{-1}BU = U^{\mathrm{T}}BU = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。

（3）$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$（とおく）の固有値は 1（2 重解）と -3 で各々に属する固有ベクトルは$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$と$\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$あった（=>）。定理（対称行列の固有値と固有ベクトル）の（2）より、$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$と$\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$は直交する。$\gamma$を調整し、長さを 1 にすると、$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$となる。$\alpha$と$\beta$を調整し、

$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$から長さが 1 で互いに直交する 2 つのベクトルを作る。例えば、まず、$\alpha=1,\beta=0$とおいて長さが 1 のベクトル$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$を作る。次に、$\alpha$と$\beta$を調整し、$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$が、この$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$と直交するようにする：

内積が 0 となるので、$\left(\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\alpha=0$である。$\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$の長さを 1 にすると、$\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$となる。

従って、$U=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$とおけば、

$$U^{-1}CU=U^{\mathrm{T}}CU=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

となる。

(4) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$（とおく）の固有値は 2 と$-1$（2 重解）で各々に属する固有ベクトルは$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$と$\beta\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$であった（=>）。定理（対称行列の固有値と固有ベクトル）より$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$と$\beta\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$は直交する。$\alpha$を調整し、長さを 1 にすると、$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$となる。$\beta$と$\gamma$を調整し、$\beta\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$から長さが 1 で互いに直交する 2 つのベクトルを作る。例えば、まず、

$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \gamma = 0$ とおいて長さが 1 のベクトル $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ を作る。次に、β と γ を

調整し、$\beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が、この $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交するようにする：

内積が 0 となるので、$\left(\beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2\beta + \gamma) = 0$ であ

る。$\beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ の長さを 1 にすると、$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ となる。

従って、$U=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$とおけば、

$$U^{\mathrm{T}}AU=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\left(P^{-1}AP\right)^n=\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\cdots\left(P^{-1}AP\right)=P^{-1}A\left(PP^{-1}\right)AP\cdots P^{-1}A\left(PP^{-1}\right)AP=P^{-1}A^nP$$

より $A^n=P\left(P^{-1}AP\right)^nP^{-1}$ となる。また、

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ これらを利用すると対角可能な行列のべき乗の計算が容易になる。

例：次の正方行列の n 乗を求める：

(1) $\begin{pmatrix} 16 & -18 & 15 \\ 0 & -1 & -1 \\ -10 & 12 & -9 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

（1） $A=\begin{pmatrix}16 & -18 & 15\\ 0 & -1 & -1\\ -10 & 12 & -9\end{pmatrix}$ とおく。$P=\begin{pmatrix}16 & 9 & 6\\ 5 & 2 & 1\\ -10 & -6 & -4\end{pmatrix}$ とおけば、

$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2}\\ -5 & 2 & -7\\ 5 & -3 & \frac{13}{2}\end{pmatrix}$、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ であった（=>）。従って、

$$A^n=P\left(P^{-1}AP\right)^n P^{-1}=\begin{pmatrix}16 & 9 & 6\\ 5 & 2 & 1\\ -10 & -6 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2}\\ -5 & 2 & -7\\ 5 & -3 & \frac{13}{2}\end{pmatrix}$$ と

$$=\begin{pmatrix}16-45\cdot 2^n+30\cdot 3^n & 18\cdot 2^n-18\cdot 3^n & 24-63\cdot 2^n+39\cdot 3^n\\ 5-10\cdot 2^n+5\cdot 3^n & 4\cdot 2^n-3\cdot 3^n & \frac{15}{2}-14\cdot 2^n+\frac{13}{2}\cdot 3^n\\ -10+30\cdot 2^n-20\cdot 3^n & -12\cdot 2^n+12\cdot 3^n & -15+42\cdot 2^n-26\cdot 3^n\end{pmatrix}$$

なる。

（2） $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ とおく。$U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とおけば、

$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ であった（=>）。

$$A^n = U\left(U^{-1}AU\right)^n U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

従って、

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-1)^n \\ \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2}(-1)^n \end{pmatrix}$$

となる。

9 章　微分

　$D \subset \mathbb{R}$ を適切な実数の集合とする。関数 $f: D \to \mathbb{R}$ の**導関数** $f': D \to \mathbb{R}$ は次のように定義される：

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

　導関数が求まる時、 f は**微分可能**であるという。導関数を求めることを**微分する**という。 $y = f(x)$ の導関数は $f'(x)$ のほかに

$$y', \frac{dy}{dx}, \left(f(x)\right)' \frac{df(x)}{dx}, \frac{d}{dx} f(x)$$

などが利用される。また、$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ が成り立つ時、**連続**であるという。

　例 1：$\left(c\right)' = 0, \left(x\right)' = 1, \left(x^2\right)' = x$ である。ただし、c は定数である。上記の定義に従って、これらを求めると

$$\lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \left(2x + h\right) = 2x$$

となる。一般に、次の定理が成り立つ。

定理：さまざまな関数を微分すると次のようになる：（=>証明）

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x$$

$$\left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$a > 0, a \neq 1$の時、

$\left(a^x\right)' = \left(\log a\right)a^x$ 特に、$\left(e^x\right)' = e^x$である。[2]

$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\log a}$ 特に、$\left(\log x\right)' = \dfrac{1}{x}$である。

　また、関数の和、積などを微分する時は、次の定理にある公式を利用すると良い。

定理：fとgが微分可能である時、次の公式が成り立つ：（=>証明）

（1）$\left(af(x) + bg(x)\right)' = af'(x) + bg'(x)$　ただし、a,bは定数である。

（2）$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

（3）$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$　ただし、$g(x) \neq 0$である。

（4）$\dfrac{d}{dx} f\left(g(x)\right) = f'\left(g(x)\right)g'(x)$

[2] $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818\cdots$である。$\log_e x$を**自然対数**と呼び、簡単に$\log x$と書く。

問 9-1：次の関数の導関数を求めよ。 (=>解答)

(1) $3x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x + 7$ (2) $\sin x + \cos x$ (3) $x\sin x$

(4) $(2x+5)^2$ (5) e^{x^2} (6) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ (7) $x(\log x - 1)$

導関数 $f'(x)$ が微分可能である時 $f(x)$ は **2 回微分可能**であるといい、$\dfrac{d}{dx}f'(x)$ を $f(x)$ の第 2 次導関数と呼び $f''(x) = f^{(2)}(x)$ と書く。一般に、第 $n-1$ 次導関数 $f^{(n-1)}(x)$ が微分可能である時 $f(x)$ は n **回微分可能**であるといい、$\dfrac{d}{dx}f^{(n-1)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次導関数と呼び $f^{(n)}(x)$ と書く。また、$\dfrac{d^n}{dx^n}f(x), \dfrac{d^n y}{dx^n}$ とも書く。

定理（Taylor の定理）：$f(x)$ が区間 $[a,b]$ で第 $(n-1)$ 次導関数が連続で、区間 (a,b) で n 回微分可能ならば[3]

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

を満たす $c\,(a < c < b)$ が存在する。

上記の Taylor の定理より次の 2 つの系が得られる。

系 1：$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続、区間 (a,b) で微分可能とする。 (=>証明)

(1) $f'(x) > 0\,(x \in (a,b))$ ならば、$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で増加関数である。

(2) $f'(x) < 0\,(x \in (a,b))$ ならば、$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で減少関数である。

---

[3] $[a,b] = \{x | a \le x \le b\}$ であり閉区間、また、$(a,b) = \{x | a < x < b\}$ であり開区間と呼ばれる

問 9-2： 次の関数の増減を調べることにより不等式が成り立つことをチェックせよ。（=>解答）

(1)　$f(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)$ の時、$f(x)>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ である。

(2)　$f(x)=\sin x-x$ の時、$f(x)<0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ である。

(3)　$f(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ の時、$f(x)>0\left(x>0\right)$ である。

(4)　$f(x)=\log(1+x)-x$ の時、$f(x)<0\left(x>0\right)$ である。

問 9-3： 前問を利用して次の極限を求めよ。（=>解答）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

c を含む十分小さい開区間にある x おいて $f(x)>f(c)\left(x\neq c\right)\left(f(x)<f(c)\left(x\neq c\right)\right)$ が成り立つならば、$f(x)$ は $x=c$ で**極大（極小）**であるといい、$f(c)$ を**極大値（極小値）**という。極大値、極小値をまとめて**極値**という。

系 2： c を含む開区間において $f''(x)$ は連続で、$f'(c)=0$ であるとする。（=>証明）

(1)　$f''(c)>0$ ならば $f(x)$ は $x=c$ で極小である。

(2)　$f''(c)<0$ ならば $f(x)$ は $x=c$ で極大である。

問 9-4： 次の関数の増減、極値を調べ、グラフの概形をかけ。（=>解答）

(1)　$y=x^2e^{-x}$　(2)　$y=\dfrac{x}{x^2+1}$

10章　積分

不定積分

関数 $f(x)$ に対して、$F'(x)=f(x)$ となる関数 $F(x)$ が存在する時、$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という。原始関数は1つとはかぎらない。例えば、C を定数とする時、$\left(F(x)+C\right)'=f(x)$ となるので、$F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数である。また、$f(x)$ の任意の原始関数は $F(x)+C$ の形に書ける。任意の原始関数を**不定積分**といい、$\int f(x)dx$ と書く。従って、$\int f(x)dx=F(x)+C$ となる。C を積分定数と呼ぶ。この定義から
$\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x),\int \dfrac{d}{dx}F(x)dx=F(x)+C$ が成り立つ。次が成り立つ。

定理：さまざまな関数の不定積分は次のようになる：

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\ (n\neq -1)$$

$$\int \cos x\, dx=\sin x+C$$

$$\int \sin x\, dx=-\cos x+C$$

$$\int a^x dx=\frac{1}{\log a}a^x+C\ (a>0,a\neq 1)$$

$$\int e^x dx=e^x+C$$

$$\int \frac{1}{x}dx=\log|x|+C$$

また、関数の和や積などの不定積分を求める時は次の公式を利用すると良い。

定理：（=>証明）

（1）$\int\left(af(x)+bg(x)\right)dx=a\int f(x)dx+b\int g(x)dx$ （a,b は定数）

（2）$\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$ （**部分積分法**）

(3) $\int f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int f(x)dx \left(x = \varphi(u)\right)$ （**置換積分法**）

(4) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$

問 10-1：次の不定積分を求めよ。 (=>解答)

(1) $\int xe^x dx$ (2) $\int xe^{x^2} dx$ (3) $\int \tan x\, dx$ (4) $\int \log x\, dx$

定積分

関数$f(x)$は区間$[a,b]$で定義されているとする。分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$において$|\Delta| := \max_{1 \le i \le n}|x_i - x_{i-1}|$とおく。また、任意の点$t_i \in [x_{i-1}, x_i]\ (i = 1, \ldots, n)$を選ぶ。$\lim_{|\Delta| \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$が存在する時、$f(x)$は$[a,b]$で**定積分可能**であるといい、この値を$\int_a^b f(x)dx$で表して$f(x)$の$[a,b]$における**定積分**という。すなわち、

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta| \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

である。また、$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \int_a^a f(x)dx = 0$と定義する。

定積分に関する基本的な事項を以下に定理として列挙する。

定理：$f(x)$が$[a,b]$で連続ならば、$[a,b]$で定積分可能である。

定理：$f(x), g(x)$が$[a,b]$で定積分可能である時、次が成り立つ：

(1) $\int_a^b \left(Af(x) + Bg(x)\right)dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx$

(2) $\int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \quad \left(\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]\right)$

(3) $[a,b]$で$f(x) \le g(x)$ならば$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$。特に、$f(x), g(x)$が$[a,b]$で連続ならば、等号が成り立つのは$f(x) \equiv g(x)$の時（恒等的に等しい

時）に限る。

（4）　$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

定理： $f(x)$ が連続ならば、$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

定理： $f(x)$ が連続で $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば、

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

定理： 次が成り立つ：

（1）　$f(x)$ が連続で $\varphi(t)$ が微分可能ならば、

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta))$　　（置換積分法）

（2）　$f(x), g(x)$ が微分可能ならば、

$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$　（部分積分法）

例 1： $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx \quad (a>0)$ を求める。

$x = a\sin t \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。$dx = a\cos t\,dt$、$t: 0 \to \dfrac{\pi}{2}$ の時 $\cos t \ge 0$、

$x: 0 \to a$ である。また、三角関数の公式より $\cos^2 t = \dfrac{\cos 2t + 1}{2}$ が成り立つ。

従って、

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt \\
&= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1)dt \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin 2t}{2} + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}
\end{aligned}$$

となる。

例 2： $\int_0^2 x^2 e^{-x} dx$ を求める。

$\int_0^2 x^2 e^{-x} dx = \int_0^2 x^2 \left(-e^{-x}\right)' dx = \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^2 + 2\int_0^2 x e^{-x} dx$ である。また、

$\left[-x^2 e^{-x}\right]_0^2 = -4e^{-2}$、$\int_0^2 x e^{-x} dx = \int_0^2 x\left(-e^{-x}\right)' dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx$、

$\left[-x e^{-x}\right]_0^2 = -2e^{-2}$、$\int_0^2 e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^2 = 1 - e^{-2}$ である。従って、

$\int_0^2 x^2 e^{-x} dx = -4e^{-2} + 2\left(-2e^{-2} + 1 - e^{-2}\right) = 2\left(1 - 5e^{-2}\right)$ となる。

問 10-2： 次の定積分を求めよ。（=>解答）

（1） $\int_0^1 \sqrt{2x+2}\, dx$ （2） $\int_1^e (\log x)^2 dx$

問 10-3： （=>解答）

（1） $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1) \quad (n = 1, 2, \ldots)$ を示せ。

（2） $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \infty$ を示せ。

索引

2

あ

い

う

え

か

き

問の解答

問 1-1：

（1）　$|\boldsymbol{e}_i| = \sqrt{1+0+0} = 1$。　（2）　$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 1\times 0 + 0\times 1 + 0\times 0 = 0$ より、なす角を θ とすると、$\cos\theta = 0$、従って、$\theta = \dfrac{\pi}{2}(90^\circ)$ である。（3）

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{1\times 0+1\times 0+2\times 4+1\times 0+3\times 0}{\sqrt{1+1+4+1+9}\sqrt{16}} = \frac{8}{4\times 4} = \frac{1}{2}$$ より $\theta = \dfrac{\pi}{3}(60^\circ)$

である。（4）　$x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ である。

問 1-2：

（1）　$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 130 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ とおくと、

$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}) = 130\times 3 + 150\times 5 + 120\times 4 = 1{,}620$ より、代金は 1,620 円である。

（2）　$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ -300 \end{pmatrix}$ とおくと、

$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2}\times 100 + \dfrac{1}{3}\times 200 - \dfrac{1}{6}\times 300 = 66\dfrac{2}{3}$ より儲けの期待値は $66\dfrac{2}{3}$ 円である。

（チェック）：

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ を同次連立 1 次方程式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$ の解とする。ま

た、$\lambda \in \mathbb{R}$とする。まず、$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = 0 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = 0 \end{cases}$と
$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}z_3 = 0 \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{23}z_3 = 0 \end{cases}$が成り立つ。これらを利用して、
$a_{11}(y_1+z_1)+a_{12}(y_2+z_2)+a_{13}(y_3+z_3)$と
$a_{21}(y_1+z_1)+a_{22}(y_2+z_2)+a_{23}(y_3+z_3)$と$a_{11}(\lambda y_1)+a_{12}(\lambda y_2)+a_{13}(\lambda y_3)$と
$a_{21}(\lambda y_1)+a_{22}(\lambda y_2)+a_{23}(\lambda y_3)$が$0$となることをチェックする。

$$
\begin{aligned}
&a_{11}(y_1+z_1)+a_{12}(y_2+z_2)+a_{13}(y_3+z_3) \\
&\quad =(a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3)+(a_{11}z_1+a_{12}z_2+a_{13}z_3)=0+0=0 \\
&a_{11}(\lambda y_1)+a_{12}(\lambda y_2)+a_{13}(\lambda y_3) \\
&\quad =\lambda(a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3)=0
\end{aligned}
$$

他も同様である。

（チェック）：
公比がrの等比数列$x=(x_k)_{k=1,2,\ldots}$は$x_k = r^{k-1}x_1$と表される。従って、
$x_{k+1} = r^k x_1 = rr^{k-1}x_1 = rx_k$となる。

（チェック）：
公比がdの等差数列$x=(x_k)_{k=1,2,\ldots}$は$x_k = x_1 + (k-1)d$と表される。従って、
$x_{k+1} = x_1 + kd = x_1 + (k-1)d + d = x_k + d$となる。

（チェック）：
関数$y = e^{ax}$を微分すると、$\dfrac{dy}{dx} = ae^{ax}$となる。従って、$\dfrac{dy}{dx} = ay$を満たす。

問 2-1：
（1） 次の連立線形差分方程式の解の集合をSとする。

$$
\begin{cases}
x_{k+1}^1 = a_{11}x_k^1 + a_{12}x_k^2 + \cdots + a_{1n}x_k^n \\
\qquad \vdots \\
x_{k+1}^n = a_{n1}x_k^1 + a_{n2}x_k^2 + \cdots + a_{nn}x_k^n
\end{cases}
\quad (k=1,2,\ldots)
$$

$x, y \in S, \lambda \in \mathbb{R}$ の時、

$$\begin{cases} x_{k+1}^1 + y_{k+1}^1 = \left(a_{11}x_k^1 + a_{12}x_k^2 + \cdots + a_{1n}x_k^n\right) + \left(a_{11}y_k^1 + a_{12}y_k^2 + \cdots + a_{1n}y_k^n\right) \\ \qquad\qquad = a_{11}\left(x_k^1 + y_k^1\right) + a_{12}\left(x_k^2 + y_k^2\right) + \cdots + a_{1n}\left(x_k^n + y_k^n\right) \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_{k+1}^n + y_{k+1}^n = \left(a_{n1}x_k^1 + a_{n2}x_k^2 + \cdots + a_{nn}x_k^n\right) + \left(a_{n1}y_k^1 + a_{n2}y_k^2 + \cdots + a_{nn}y_k^n\right) \\ \qquad\qquad = a_{n1}\left(x_k^1 + y_k^1\right) + a_{n2}\left(x_k^2 + y_k^2\right) + \cdots + a_{nn}\left(x_k^n + y_k^n\right) \\ (k = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda x_{k+1}^1 = \lambda\left(a_{11}x_k^1 + a_{12}x_k^2 + \cdots + a_{1n}x_k^n\right) \\ \qquad = a_{11}\left(\lambda x_k^1\right) + a_{12}\left(\lambda x_k^2\right) + \cdots + a_{1n}\left(\lambda x_k^n\right) \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots) \\ \lambda x_{k+1}^n = \lambda\left(a_{n1}x_k^1 + a_{n2}x_k^2 + \cdots + a_{nn}x_k^n\right) \\ \qquad = a_{n1}\left(\lambda x_k^1\right) + a_{n2}\left(\lambda x_k^2\right) + \cdots + a_{nn}\left(\lambda x_k^n\right) \end{cases}$$

となるので、$x + y, \lambda x \in S$ である。

（2） 次の連立線形微分方程式の解の集合をSとする。

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

$y, z \in S, \lambda \in \mathbb{R}$ の時、

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(y_1+z_1\right)}{dx}=\dfrac{dy_1}{dx}+\dfrac{dz_1}{dx} \\ \qquad\qquad =\left(a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n\right)+\left(a_{11}z_1+a_{12}z_2+\cdots+a_{1n}z_n\right) \\ \qquad\qquad =a_{11}\left(y_1+z_1\right)+a_{12}\left(y_2+z_2\right)+\cdots+a_{1n}\left(y_n+z_n\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{d\left(y_n+z_n\right)}{dx}=\dfrac{dy_n}{dx}+\dfrac{dz_n}{dx} \\ \qquad\qquad =\left(a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n\right)+\left(a_{n1}z_1+a_{n2}z_2+\cdots+a_{nn}z_n\right) \\ \qquad\qquad =a_{n1}\left(y_1+z_1\right)+a_{n2}\left(y_2+z_2\right)+\cdots+a_{nn}\left(y_n+z_n\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(\lambda y_1\right)}{dx}=\lambda\dfrac{dy_1}{dx}=\lambda\left(a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n\right) \\ \qquad =a_{11}\left(\lambda y_1\right)+a_{12}\left(\lambda y_2\right)+\cdots+a_{1n}\left(\lambda y_n\right) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{d\left(\lambda y_n\right)}{dx}=\lambda\dfrac{dy_n}{dx}=\lambda\left(a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n\right) \\ \qquad =a_{n1}\left(\lambda y_1\right)+a_{n2}\left(\lambda y_2\right)+\cdots+a_{nn}\left(\lambda y_n\right) \end{cases}$$

となるので、$y+z,\lambda z\in S$ である。

(3)　$x_{k+1}^1=x_{k+1}=x_k^2$ である。また、$x_{k+1}^2=x_{k+2}=-x_k+2x_{k+1}=-x_k^1+2x_k^2$ である。従って、$\begin{cases} x_{k+1}^1= & & x_k^2 \\ x_{k+1}^2= & -x_k^1 & +2x_k^2 \end{cases}$ となる。

一般に、線形差分方程式

$$x_{k+n}+a_1x_{k+n-1}+\cdots+a_nx_k=0$$

は $x^1=\left(x_k\right)_{k=1,2,\dots},\dots,x^n=\left(x_{k+n}\right)_{k=1,2,\dots}$ とおけば、

$$\begin{cases} x_{k+1}^1 = & & x_k^2 & & & \\ x_{k+1}^2 = & & & x_k^3 & & \\ \quad\vdots & & & & \ddots & \\ x_{k+1}^{n-1} = & & & & & x_k^n \\ x_{k+1}^n = & -a_n x_k^1 & -a_{n-1}x_k^2 & -a_{n-2}x_k^3 & \cdots & -a_1 x_k^n \end{cases}$$

となる。

（4） $\dfrac{dy_1}{dx} = y' = y_2$ である。また、$\dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(y'\right) = y'' = 2y + 3y' = 2y_1 + 3y_2$

である。従って、$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = & & y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = & 2y_1 & +3y_2 \end{cases}$ となる。

　一般に、線形微分方程式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

は $y_1 = y, y_2 = y', ..., y_n = y^{(n-1)}$ とおけば、

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = & & y_2 & & & \\ \dfrac{dy_2}{dx} = & & & y_3 & & \\ \quad\vdots & & & & \ddots & \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = & & & & & y_n \\ \dfrac{dy_n}{dx} = & -a_n y_1 & -a_{n-1} y_2 & -a_{n-2} y_3 & \cdots & -a_1 y_n \end{cases}$$

となる。

問 3-1：

(1) $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_1+\lambda_2\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ より $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ となり、$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である。

(2) $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3+\lambda_4\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_4\\ \lambda_1+\lambda_2\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ を解くと、$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$ となり、$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ は 1 次独立である。従って、$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ は基底となる。$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3+\lambda_4\boldsymbol{b}_4=\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_4\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_4\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ を解くと、$\lambda_2=0,\lambda_3=\lambda_4=-\lambda_1$ となり、$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_4$ は 1 次従属である。特に、$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{b}_4$ となる。

(3) $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}+\lambda_4\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$ を解く。

$\begin{cases} & 2\lambda_2 & +\lambda_3 & -\lambda_4 & =0\\ \lambda_1 & -2\lambda_2 & & +\lambda_4 & =0\\ \lambda_1 & +4\lambda_2 & +4\lambda_3 & -\lambda_4 & =0\\ -\lambda_1 & -2\lambda_2 & -2\lambda_3 & +\lambda_4 & =0\\ 3\lambda_1 & +4\lambda_2 & +6\lambda_3 & -\lambda_4 & =0\end{cases}$ より、$\begin{cases}\lambda_1=\lambda_4\\ \lambda_2=\lambda_4\\ \lambda_3=-\lambda_4\end{cases}$ となる。従って、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ は 1 次従属であり、例えば、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$ となる。

(4) $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\ -\lambda_1+3\lambda_2+5\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ を解くと、$\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{1}{2}\lambda_3\\ \lambda_2=-\dfrac{3}{2}\lambda_3\end{cases}$ となる。従って、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は 1 次従属であり、例えば、$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ となる。

問 3-2:

$x^3=\lambda_0+\lambda_1x+\lambda_2x(x-1)+\lambda_3x(x-1)(x-2)$ とおく。$x=0$ とおいて、$\lambda_0=0$

となる。$x=1$とおいて、$\lambda_1=1$となる。$x=2$とおいて、$8=2+2\lambda_2$となる。$x=3$とおいて、$27=3+6\lambda_2+6\lambda_3$となる。これより、
$\lambda_0=0, \lambda_1=1, \lambda_2=3, \lambda_3=1$となり、結局、$x^3=x+3x(x-1)+x(x-1)(x-2)$となる。

問 3-3：

$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$である。$(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)=0+1+1+1=3, (\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)=1+1+1+1=4$より、

$\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$となる。$(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1)=2, (\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2)=\frac{1}{2}, (\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2)=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$より、$\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$となる。

$(\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{b}_1)=2, (\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{b}_2)=-\frac{1}{2}, (\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{b}_3)=\frac{1}{3}, (\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_3)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$より、

$$\boldsymbol{b}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}0\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ となる。まとめると、

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}0\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ となる。また、$(\boldsymbol{b}_4,\boldsymbol{b}_4)=\frac{1}{2}$ より、

$$\frac{1}{|\boldsymbol{b}_1|}\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\frac{1}{|\boldsymbol{b}_2|}\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{6}\end{pmatrix},\frac{1}{|\boldsymbol{b}_3|}\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}0\\-\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix},\frac{1}{|\boldsymbol{b}_4|}\boldsymbol{b}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$ となる。

問 4-1：

（1）

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

となる。

（2）

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

（3）

$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}$ となる。 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は連立 1 次方程式

$\begin{cases} x_1 & +8x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +5x_3 & +x_4 & = 8 \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = 6 \end{cases}$ を表す。

となる。

（4）

$$AB = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 2 \\ 18 & 2 & 1 \\ 50 & 14 & 4 \\ 12 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

B の列の個数 3 と A の行の個数 4 が一致しないため、BA は存在しない。

問 4-2： これらの行列には逆行列が存在することが分かっているので（本文で後述）（=>ここの）性質を利用する。まず、$II = I$ は明らかに成り立つ。以下では、ある特別な例のみをチェックする。

$$P_{23}P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2(c)P_2\left(\frac{1}{c}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{13}(c)P_{13}(-c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

また

$$P_{23}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{23}$$

$$P_2^{\mathrm{T}}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_2(c)$$

$$P_{13}^{\mathrm{T}}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{31}(c)$$

問 4-3：

（1）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{（1行の1倍を3行に加える）} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{（2行}$$

の-2倍を3行に加える）$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$階数は2である。

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$ （1行の-1倍を3行に加える）$\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$ （1行の1倍を4行に加える）$\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$階数は3である。

(3)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 7 & 4 & 4 & -3 \\ 4 & 4 & 1 & -5 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$ （1行と2行を交換する）$\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 7 & 4 & 4 & -3 \\ 4 & 4 & 1 & -5 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$ （1行の1倍を4行に加える）$\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & 6 & 6 & -2 \\ 4 & 4 & 1 & -5 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{（1行の}-2\text{倍を5行に加える）} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 & -6 & -6 & 1 \end{pmatrix} \text{（2行の1倍を3行に加える）} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 & -6 & -6 & 1 \end{pmatrix} \text{（2行の}-1\text{倍を4行に加える）} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 & -6 & -6 & 1 \end{pmatrix} \text{（2行の2倍を5行に加える）} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{（3行の}-2\text{倍を4行に加える）} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{（3行の1倍を5行に加える）} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
→階数は3である。

(4)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -10 & 1 & -5 & 0 & 20 \\ 1 & -6 & 1 & -2 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$
(なるべく分数を使いたくないので、1行と5行を交換する)→
$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 & -2 & 0 & 11 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -10 & 1 & -5 & 0 & 20 \\ 3 & 1 & 3 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$
(1行の-2倍、-2倍、-3倍を、各々、3行、4行、5行に加える)→
$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 & -2 & 0 & 11 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 19 & 0 & 4 & 1 & -27 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 19 & 0 & 4 & 1 & -27 \end{pmatrix}$$
(2行の$\dfrac{19}{2}$倍、1倍、$\dfrac{19}{2}$倍を各々、3行、4行、5行に加える)→
$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 & -2 & 0 & 11 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \dfrac{19}{2} & \dfrac{27}{2} & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{19}{2} & \dfrac{27}{2} & 1 & -8 \end{pmatrix}$$
(3行の-1倍を5行に加える)

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 & -2 & 0 & 11 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{19}{2} & \frac{27}{2} & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ →階数は3である。

(5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ (1行の-1倍を4行に加える) →

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ (2行と3行を交換する) → $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(3行の-1倍を4行に加える) → $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ (4列と5列を交換

する) → $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ →階数は4である。

(6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$ (1行の-1倍、-1倍を、各々、3行、4行へ加え

る）→$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$（2 行の1倍、$-2$倍を、各々、3 行、4 行へ加える）→$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$（3 行の$-1$倍を 4 行に加える）→

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}$（4 列と 5 列を交換する）→

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$→階数は 4 である。

問 5-1：（1） $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3,\ldots),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3,\ldots),\boldsymbol{c}=f(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{d}=f(\boldsymbol{b})$ とおくと、$\boldsymbol{c}=(a_2,a_3,a_4,\ldots),\boldsymbol{d}=(b_2,b_3,b_4,\ldots)$ である。この時、

$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=(\lambda a_1+\mu b_1,\lambda a_2+\mu b_2,\lambda a_3+\mu b_3,\ldots)$,

$\lambda\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{d}=(\lambda a_2+\mu b_2,\lambda a_3+\mu b_3,\lambda a_4+\mu b_4,\ldots)$ であるので、

$f(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{d}=\lambda f(\boldsymbol{a})+\mu f(\boldsymbol{b})$ となる。

（2） $f(\lambda g_1+\mu g_2)=(\lambda g_1+\mu g_2)'=\lambda g_1'+\mu g_2'=\lambda f(g_1)+\mu f(g_2)$ である。

$$\boldsymbol{a}=(a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots,\quad a_n,\quad a_{n+1},\quad \ldots)$$

$$f(\boldsymbol{a})=(a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad \ldots,\quad a_{n+1},\quad a_{n+2},\quad \ldots)$$

問 6-1：

(1)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -6 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & -9 & -7 & -2 \end{array}\right) \text{（1行と3行を交換する）} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -9 & -7 & -2 \end{array}\right) \text{（1行の}-2\text{倍を2行に加える）} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -13 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -9 & -7 & -2 \end{array}\right) \text{（1行の}-3\text{倍を3行に加える）} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -13 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & -22 & -14 \end{array}\right) \text{（2行の}-2\text{倍を4行に加える）} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -13 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \text{（3行の}-2\text{倍を1行に加える）} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -13 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \text{（3行の4倍を2行に加える）} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \text{（3行の}-2\text{倍を4行に加える）} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \text{解は} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{となる。}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \text{（1行の1倍を2行に加える）} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \text{（1行の}-1\text{倍を4行に加える）} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \text{（2行の}-2\text{倍を3行に加える）} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \text{（2行の}-1\text{倍を4行に加える）} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right) \text{（3行を}-\frac{1}{3}\text{倍する）} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$（3行の-2倍、-2倍、4倍を、各々、1行、2行、4行に加える）$\to$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$（4行を$-\frac{3}{2}$倍する）$\to$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$（4行の$\frac{2}{3}$倍、$-\frac{1}{3}$倍、$-\frac{1}{3}$倍を、各々、1行、2行、3行に加える）$\to$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$$\to$解は$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$となる。

(3)

$$\begin{cases} x & +y & & +u & +2v & =0 \\ & y & +z & -2u & -2v & =1 \\ x & +y & +z & -u & -v & =3 \\ -x & -y & & -u & -2v & =0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$ （1行の-1倍、1倍を、各々、3行、4行に加える）$\rightarrow$ $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ （2行の-1倍を1行に加える）$\rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ （3行の1倍、-1倍を、各々、1行、2行に加える）$\rightarrow$ $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ $\rightarrow$解は $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ となる。

(4)

$$\begin{cases} x & -y & & -u & -2v & =1 \\ x & -y & +z & & -3v & =0 \\ 2x & -2y & +z & -u & -5v & =1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \text{解は} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{とな}$$

る。

（5）

$$\begin{cases} & & x_3 & +12x_4 & -x_5 & =33 \\ -6x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & +2x_5 & =-63 \\ 5x_1 & -2x_2 & & +2x_4 & -x_5 & =52 \\ 3x_1 & & -3x_3 & -12x_4 & +2x_5 & =-3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 12 & -1 & 33 \\ -6 & 3 & 0 & -3 & 2 & -63 \\ 5 & -2 & 0 & 2 & -1 & 52 \\ 3 & 0 & -3 & -12 & 2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 12 & -1 & 33 \\ 0 & 3 & -6 & -27 & 6 & -69 \\ 0 & -2 & 5 & 22 & -\frac{13}{3} & 57 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & \frac{2}{3} & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 12 & -1 & 33 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 2 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -\frac{1}{3} & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & \frac{2}{3} & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 12 & -1 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & 15 & 0 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & \frac{2}{3} & -22 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & -\frac{1}{3} & 32 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & \frac{11}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{1}{3} & 10 \end{array}\right) \to \text{解は} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ \frac{11}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ -15 \\ 0 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \text{である。}$$

（6）

$$\begin{cases} \quad\; y + 2z - u = 5 \\ x + 2y - z + u = 5 \\ 2x + y - 2z + 2u = 10 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \text{解は} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{である。}$$

問 6-2：

（1）

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{（1行の1倍を3行に加える）} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{（3行を}\frac{1}{3}\text{倍する）} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \text{（3行}$$

$$\text{の}-1\text{倍、1倍を、各々、1行、2行に加える）} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \to \text{逆}$$

行列は$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$となる。

(2)

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ (1行の-2倍、-1倍1、倍を、各々、2行、3行、4行に加える) $\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ (2行を$-\frac{1}{4}$倍し、その-3倍、1倍、-3倍を、各々、1行、3行、4行に加える) $\to$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right)$ (3行の-1倍を4行に加える) $\to$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ (4行の$\frac{5}{4}$倍、$-\frac{3}{4}$倍、$\frac{5}{4}$倍を、各々、

1行、2行、3行に加える）→$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$→逆行列

は$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$である。

(3)

$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$（1行と2行を交換）→

$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$（1行の2倍と−1倍を、各々、3行

と5行に加える）→$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$（2行と4行を

交換）→ $\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ （3 行の −1倍を 4 行に加える）→ $\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ （4 行を $-\frac{1}{2}$ 倍し、その −1倍を 2 行と 3 行に加える）→ $\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ （5 行を $\frac{1}{2}$ 倍し、その1倍、−1倍、2 倍、1倍を、各々、1行、2 行、3 行、4 行に加える）→ $\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$ →逆行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ である。

(4)

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ （計算をし易くするために、1行を3行へ、3行を2行へ移動させる）→ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ （1行の–2倍を3行へ加える）→

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$ （2行を$\frac{1}{3}$倍し、その–1倍を3行に加える）→

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$ （3行を1行に加え、3行を$-\frac{1}{2}$倍する）→

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} \end{array}\right)$ →逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ である。

(5)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{(1行と2行を交換する)} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{(1行の}-1\text{倍を3行に加える)} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{(2行の}-2\text{倍を4行に加える)} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

左側にある4次の行列の3行と4行が一致し、行列式が0となるので、逆行列は存在しない。

(6)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \text{逆行列は} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

(7)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{(1行と3行を交換)} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ （分数を使うのをなるべく避けるために、2 行と 3 行を交換）→

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -11 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 4 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{12} & -\frac{3}{4} & -\frac{11}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \end{array}\right) \to \text{逆行列は} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{12} & -\frac{3}{4} & -\frac{11}{12} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix} \text{で}$$
ある。

（8）

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ （1行と 2 行を交換する）→

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \text{逆行列は} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{である。}$$

問 7-1：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2 - 1\times 4 = 0$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1 - 4\times 4 = -15$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2\times 1\times 1 + 1\times 1\times 3 - 0 = 5$

(4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 2\times 1 + 2\times 1\times 1 + 3\times 3\times 0 - 1\times 1\times 0 - 2\times 3\times 1 - 3\times 2\times 1 = -8$$

問 7-2：

(1)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{（1行の2倍と1倍を、各々、2行と4行に加える）} \to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$ （2 行の -1 倍と $-\frac{1}{2}$ 倍を、各々、3 行と 4 行に加える）→

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$ （3 行の $\frac{2}{3}$ 倍を 4 行に加える）→ $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$ →行

列式は $(-1)\times 2\times(-3)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-9$ である。

（2）

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$ （1行の -5 倍、-3 倍、1倍を、各々、2 行、3 行、4 行に加

える）→ $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -13 & 0 & -6 \\ 0 & -7 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$ （2 行の $-\frac{7}{13}$ 倍と $\frac{3}{13}$ 倍を、各々、3 行と 4 行に

加える）→ $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -13 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{29}{13} \\ 0 & 0 & 3 & \frac{47}{13} \end{pmatrix}$$ （3 行の $-\frac{3}{2}$ 倍を 4 行へ加える）→

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -13 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{29}{13} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{26} \end{pmatrix} \to \text{行列式は} 1\times(-13)\times 2\times\frac{7}{26} = -7 \text{ である。}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{（1行の} -3 \text{倍と1倍を、各々、3行と4行に加える）} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{（2行の} -\frac{1}{2} \text{倍を4行に加える）} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{（3行の} \frac{1}{4} \text{倍を4行に加える）} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{4} \end{pmatrix} \to \text{行列式は}$$

$1\times 2\times(-10)\times\frac{19}{4} = -95$ である。

(4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{（1行の} -\frac{1}{2} \text{倍を2行に加える）} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{（2行}$$

の$-\dfrac{1}{3}$倍を3行と4行に加える）$\rightarrow\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{5}{6} \\ 0 & 0 & \dfrac{5}{2} & -\dfrac{1}{6} \end{pmatrix}$（3行の5倍を4行に加

える）$\rightarrow\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$→行列式は$2\times3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times4=-12$である。

(5)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$（1行の–3倍と–2倍を、各々、2行と3行に加え

る）$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$（2行の1倍と–3倍を、各々、4行と5行に加

える）$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & 21 \end{pmatrix}$（3行の–3倍と12倍を、各々、4行と5

行に加える）→$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 38 & -27 \end{pmatrix}$（4行の$\dfrac{19}{4}$倍を5行に加える）→

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$→行列式は$1\times(-1)\times1\times(-8)\times\dfrac{3}{2}=12$である。

(6)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 9 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -\dfrac{7}{3} & -9 & -2 & \dfrac{5}{3} \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & \dfrac{23}{3} & 1 & 0 & \dfrac{5}{3} \\ 0 & -\dfrac{5}{3} & 1 & 1 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -\dfrac{7}{3} & -9 & -2 & \dfrac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\dfrac{114}{7} & -\dfrac{30}{7} & \dfrac{39}{7} \\ 0 & 0 & -\dfrac{200}{7} & -\dfrac{46}{7} & \dfrac{50}{7} \\ 0 & 0 & \dfrac{52}{7} & \dfrac{17}{7} & -\dfrac{6}{7} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -\dfrac{7}{3} & -9 & -2 & \dfrac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\dfrac{114}{7} & -\dfrac{30}{7} & \dfrac{39}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{18}{19} & -\dfrac{50}{19} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{9}{19} & \dfrac{32}{19} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -9 & -2 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{114}{7} & -\frac{30}{7} & \frac{39}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{18}{19} & -\frac{50}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \text{行列式は} 3\times\left(-\frac{7}{3}\right)\times\left(-\frac{114}{7}\right)\times\frac{18}{19}\times 3 = 324$$

である。

問 7-3：

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\times1\times2-1\times1\times(-1)=3 \text{ より、}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\times1\times3-2\times2\times3=-6 \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\times1\times1-(-1)\times1\times(-1)=1 \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

問 7-4：

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\times2\times1+1\times1\times1-1\times2\times1-1\times1\times3=-2 \text{ より}$$

$$x=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{2}=-\frac{1\times2\times1+1\times1\times(-1)-1\times1\times3}{2}=1$$

$$y=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{2}=-\frac{1\times1\times1-1\times2\times1-1\times1\times(-1)}{2}=0$$

$$z=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{2}=-\frac{1\times2\times(-1)+1\times2\times3-1\times2\times1-1\times2\times(-1)}{2}=-2$$

となる。

(2)

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 3 \text{より}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}}{3} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}}{3} = 2$$

$$u = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{3} = -6$$

となる。

問 8-1：

(1) $A=\begin{pmatrix} 16 & -18 & 15 \\ 0 & -1 & -1 \\ -10 & 12 & -9 \end{pmatrix}$ とおく。

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-16 & 18 & -15 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \\ 10 & -12 & \lambda+9 \end{vmatrix}=\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

より、固有値は 1 と 2 と 3 である。固有値 1 に属する固有ベクトルは、

$\begin{pmatrix} -15 & 18 & -15 \\ 0 & 2 & 1 \\ 10 & -12 & 10 \end{pmatrix}$ （2 行の 15 倍を 1 行に加える。2 行の -10 倍を 3 行に加える。）$\to\begin{pmatrix} -15 & 48 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 10 & -32 & 0 \end{pmatrix}$ （3 行を $\frac{1}{10}$ 倍する。3 行の 15 倍を 1 行に加える。）

$\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -\frac{16}{5} & 0 \end{pmatrix}$ となり、$\alpha\begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ となる。固有値 2 に属する固有ベクトルは、

$\begin{pmatrix} -14 & 18 & -15 \\ 0 & 3 & 1 \\ 10 & -12 & 11 \end{pmatrix}$ （2 行の 15 倍を 1 行に加える。2 行の -11 倍を 3 行に加える。）$\to\begin{pmatrix} -14 & 63 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 10 & -45 & 0 \end{pmatrix}$ （3 行を $\frac{1}{10}$ 倍する。3 行の 14 倍を 1 行に加える。）

$\to\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&1\\1&-\frac{9}{2}&0\end{pmatrix}$となり、$\beta\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\1\\-3\end{pmatrix}$となる。固有値3に属する固有ベクトルは、

$\begin{pmatrix}-13&18&-15\\0&4&1\\10&-12&12\end{pmatrix}$（2行の15倍を1行に加える。2行の$-12$倍を3行に加える。）$\to\begin{pmatrix}-13&78&0\\0&4&1\\10&-60&0\end{pmatrix}$（3行を$\frac{1}{10}$倍する。3行の13倍を1行に加える。）

$\to\begin{pmatrix}0&0&0\\0&4&1\\1&-6&0\end{pmatrix}$となり、$\gamma\begin{pmatrix}6\\1\\-4\end{pmatrix}$となる。

（2）$A=\begin{pmatrix}1&-3&0\\-2&1&-3\\0&2&1\end{pmatrix}$とおく。

$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&3&0\\2&\lambda-1&3\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$より、固有値は1である。

固有値1（3重解）に属する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix}0&3&0\\2&0&3\\0&-2&0\end{pmatrix}$（2行を$\frac{1}{2}$倍する。）$\to\begin{pmatrix}0&3&0\\1&0&\frac{3}{2}\\0&-2&0\end{pmatrix}$（1行を$\frac{1}{3}$倍する。1行の2倍を3行に加える。）$\to$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より、$\alpha\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

(3) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とおく。

$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ より、固有値は 1 と 2 (2 重解) である。固有値 1 に属する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (1 行の -1 倍を 2 行に加える。1 行の 1 倍を 3 行に加える。) $\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2 行を -1 倍する。) $\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より、$\alpha\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。固有値 2 に属する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2 行の -2 倍を 1 行に加える。2 行の 1 倍を 3 行に加える。) $\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり、$\beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

(4) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda & -2\\ 0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\left(\lambda^2-\lambda-5\right)$$ より、固有値は 1 と $\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$ である。固有値 1 に属する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$（2 行を -1 倍する。）$\to\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$（1 行の 1 倍を 2 行に加える。1 行の 2 倍を 3 行に加える。）$\to\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より、$\alpha\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ となる。固有値 $\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$ に属する固有ベクトルは、（以降、複号同順）$\begin{pmatrix}\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2} & 1 & 0\\ 1 & \frac{1\pm\sqrt{21}}{2} & -2\\ 0 & -2 & \frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}\end{pmatrix}$（2 行の $-\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$ 倍を 1 行に加える。）$\to\begin{pmatrix}0 & -4 & -1\pm\sqrt{21}\\ 1 & \frac{1\pm\sqrt{21}}{2} & -2\\ 0 & -2 & \frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}\end{pmatrix}$（3 行を $-\dfrac{1}{2}$ 倍する。3 行の 4 倍を 1 行に加える。3 行の $-\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$ 倍を 2 行に加え

る。）$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{-1\pm\sqrt{21}}{4} \end{pmatrix}$ となり、$\beta \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{-1\pm\sqrt{21}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

$f_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$ より、固有値は 2 と -1（2 重解）である。固有値 2 に属する固有ベクトルは、

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$（1 行を $\frac{1}{2}$ 倍する。1 行の 1 倍を 2 行と 3 行に加える。）$\to$

$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$（2 行の 1 倍を 3 行に加える。2 行を $\frac{2}{3}$ 倍する。2 行の $\frac{1}{2}$ 倍を 1 行に加える。）$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より、$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。固有値 -1 に属する固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$（1 行を -1 倍する。1 行を 2 行と 3 行に加える。）

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より、$\beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

問 8-2：

(1) $\left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$ と分割すると、固有多項式は

$(\lambda^2-1)(\lambda^2+\lambda-4)(\lambda-4)$ となる。

(2) $\left(\begin{array}{ccc|c|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 5 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right)$ と分割すると、固有多項式は

$(\lambda^3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda)$ となる。また、$\left(\begin{array}{c|cc|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 5 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -6 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right)$ とみなせば、$\lambda(\lambda^2-1)(\lambda-2)\lambda(\lambda+2)$ となる。（もちろんこれらは一致する。）

問 8-3：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (第 2 行を -1 倍する；第 2 列を -1 倍する) →

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (第 2 行の -1 倍を第 1 行に加える；第 1 列の 1 倍を第 2 列

に加える）$\rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$（第 2 行の 1 倍を第 3 行に加える；第 3 列の -1倍を第 2 列に加える）$\rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$（第 4 行を$-1$倍する；第 4 列を$-1$倍する）$\rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$（第 4 行の$-1$倍を第 3 行に加える；第 3 列の 1 倍を第 4 列に加える）$\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$。これより、固有多項式は$\left(\lambda^2-2\lambda-1\right)\left(\lambda^2-\lambda+1\right)$となる。

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$（第 2 行の$-2$倍を第 1 行に加える；第 1 列の 2 倍を第 2 列に加える）$\rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$（第 2 行の$-1$倍を第 4 行に加える；第 4 列の 1 倍を第 2 列に加える）$\rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$（第 3 行と第 4 行を交換；第 3

列と第 4 列を交換）→$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$（第 3 行の$-1$倍を第 1 行に加える；第 1 列の 1 倍を第 3 列に加える）→$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$（第 3 行の$-2$倍を第 2 行に加える；第 2 列の 2 倍を第 3 列に加える）→$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$（第 4 行を$-1$倍する；第 4 列を$-1$倍する）→$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$（第 4 行の 1 倍を第 2 行に加える；第 2 列の-1倍を第 4 列に加える）→$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$（第 4 行の$-3$倍を第 3 行に加える；第 3 列の 3 倍を第 4 列に加える）→
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$。これより、固有多項式は$\lambda^4-3\lambda^3+2\lambda-1$となる。

問 8-4：

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。固有多項式は $f_A(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1$ であった（=>）。$\lambda^5=\left(\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1\right)\left(\lambda^2+3\lambda+6\right)+10\lambda^2-15\lambda+6$ より、

$$
\begin{aligned}
A^5 &= 10A^2-15A+6I \\
&= 10\begin{pmatrix} 7 & -6 & 9 \\ -4 & 1 & -6 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix} - 15\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 61 & -15 & 90 \\ -10 & 1 & -15 \\ -40 & 10 & -59 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。

(2) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。固有多項式は $f_A(\lambda)=\lambda^3-3\lambda-2$ であった（=>）。$\lambda^5=\left(\lambda^3-3\lambda-2\right)\left(\lambda^2+3\right)+2\lambda^2+9\lambda+6$ より、

$$
\begin{aligned}
A^5 &= 2A^2+9A+6I \\
&= 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & 11 & 11 \\ 11 & 10 & 11 \\ 11 & 11 & 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。

問 8-5：

（1） $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ -2 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ （とおく）の固有値は 1（3 重解）で、これに属する固有ベクトルは $\alpha\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ であった（=>）。3 個の 1 次独立な固有ベクトルが存在しないので、この行列は対角化不可能である。

（2） $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ （とおく）の固有値は 2 と -1（2 重解）であり、各々に属する固有ベクトルは $\alpha\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ と $\beta\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ であった（=>）。

$P=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ とおくと、$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$、

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ となり、A は対角化可能である。

問 9-1：

（1） $\left(3x^4-x^3+2x^2+5x+7\right)'=12x^3-3x^2+4x+5$ となる。

（2） $\left(\sin x+\cos x\right)'=\cos x-\sin x$ となる。

（3） $\left(x\sin x\right)'=\left(x\right)'\sin x+x\left(\sin x\right)'=\sin x+x\cos x$ となる。

(4)　$f(x)=x^2, g(x)=2x+5$ とおく。$f'(x)=2x, g'(x)=2$ より、

$\left((2x+5)^2\right)'=f'\left(g(x)\right)g'(x)=2\left(2x+5\right)\times 2=4\left(2x+5\right)$ となる。

(5)　$f(x)=e^x, g(x)=x^2$ とおく。$f'(x)=e^x, g'(x)=2x$ より、

$\left(e^{x^2}\right)'=f'\left(g(x)\right)g'(x)=e^{x^2}2x=2xe^{x^2}$ となる。

(6)　$\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\left(\sin x\right)'\cos x-\sin x\left(\cos x\right)'}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ となる。

(7)　$\left(x\left(\log x-1\right)\right)'=(x)'\left(\log x-1\right)+x\left(\log x-1\right)'=\log x-1+\dfrac{x}{x}=\log x$ となる。

問 9-2：

(1)　$f(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)$ より、

$f'(x)=\cos x-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right), f''(x)=-\sin x+x, f'''(x)=-\cos x+1$ である。

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の時、$\cos x<1$ より、$f'''(x)>0$ であるので、$f''(x)$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で増加関数である。これと $f''(0)=0$ より $f''(x)>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ である。すなわち、$f'(x)$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で増加関数である。これと $f'(0)=0$ より $f'(x)>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ である。すなわち、$f(x)$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で増加関数である。$f(0)=0$ より $f(x)>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる。

(2)　$f(x)=\sin x-x$ より、$f'(x)=\cos x-1$ である。$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の時、$\cos x<1$ より、$f'(x)<0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ である。すなわち、$f(x)$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で減少関数である。$f(0)=0$ より $f(x)<0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる。

（3） $f(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ より、

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-(1-x)=\dfrac{x^2}{1+x}>0\,(x>0)$ である。すなわち、$f(x)$ は $x>0$ で増加関数である。$f(0)=0$ より $f(x)>0\,(x>0)$ となる。

（4） $f(x)=\log(1+x)-x$ より、$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=-\dfrac{x}{1+x}<0\,(x>0)$ である。すなわち、$f(x)$ は $x>0$ で減少関数である。$f(0)=0$ より

$f(x)<0\,(x>0)$ となる。

問 9-3：

問 8-2 の（1）と（2）より $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の時、$\dfrac{x-\dfrac{x^3}{6}}{x}<\dfrac{\sin x}{x}<1$ である。

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ の時、$\dfrac{(-x)-\dfrac{(-x)^3}{6}}{-x}<\dfrac{\sin(-x)}{-x}<1$ より $\dfrac{x-\dfrac{x^3}{6}}{x}<\dfrac{\sin x}{x}<1$ となる。

従って、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\dfrac{x^3}{6}}{x}\leq\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\leq 1$ より、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ となる。

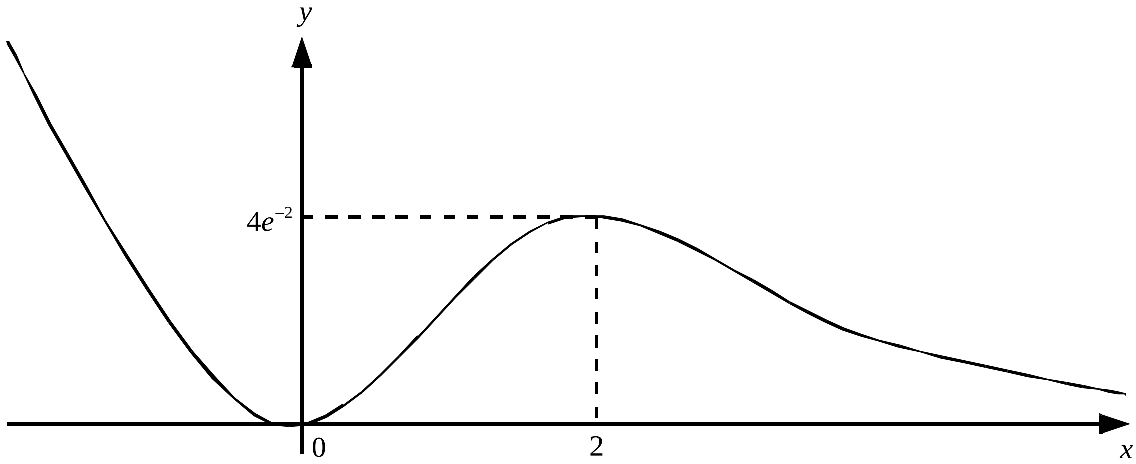
問 9-4：

（1） $y=x^2e^{-x}$ より $y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=-x(x-2)e^{-x}$、

$y''=2e^{-x}-2xe^{-x}-2xe^{-x}+x^2e^{-x}=(2-4x+x^2)e^{-x}$ である。増減表は下記のようになる。$x=0$ の時、$y''=2>0$ であるので極小値 0 を取る。$x=2$ の時、$y''=-2e^{-2}<0$ であるので極大値 $4e^{-2}$ を取る。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{-x}=+\infty$、$\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$、$x\neq 0$ の時、$y>0$ に注意して、グラフの概形は下図のようになる。



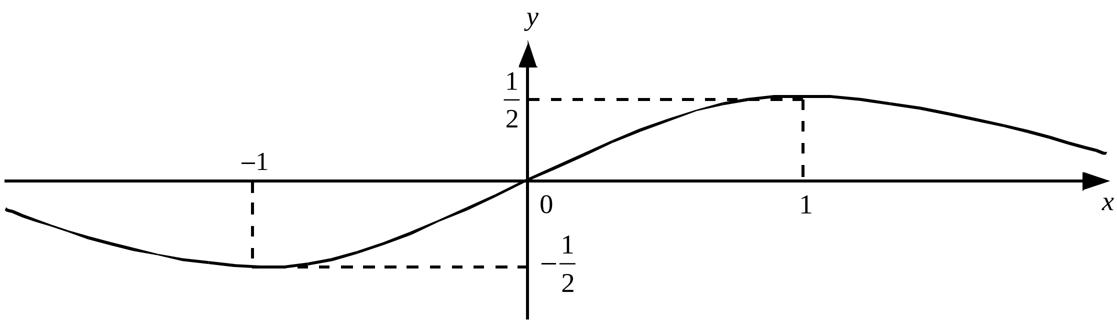
（2） $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ より $y'=\dfrac{x^2+1-x\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=-\dfrac{(x+1)(x-1)}{\left(x^2+1\right)^2}$、$y''=\dfrac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$

である。増減表は下記のようになる。$x=-1$の時、$y''=\dfrac{1}{2}>0$ であるので極小値$-\dfrac{1}{2}$ を取り、$x=1$の時、$y''=-\dfrac{1}{2}<0$ であるので極大値$\dfrac{1}{2}$ を取る。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘

また、$x=0$の時、$y=0$、$x<0$の時、$y<0$、$x>0$の時、$y>0$であり、

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$に注意すると、グラフの概形は下図のようになる。



問 10-1：積分定数は省略する。

(1) 部分積分法を利用する。$\int xe^x dx=\int x\left(e^x\right)' dx=xe^x-\int e^x dx=(x-1)e^x$

(2) 置換積分法を利用する。$f(x)=e^x,\varphi(x)=x^2,t=\varphi(x)$ とおけば、

$\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int\left(x^2\right)' e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int\varphi'(x)f\left(\varphi(x)\right)dx=\frac{1}{2}\int f(t)dt=\frac{1}{2}e^t=\frac{1}{2}e^{x^2}$ と

なる。左から第3、4、5項を暗算で行うと、$\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int\left(x^2\right)' e^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}$

となる。

(3) $\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{\left(\cos x\right)'}{\cos x}dx=\log\left|\cos x\right|$

(4) 部分積分法を利用する。

$$\int\log x\,dx=\int\left(x\right)'\log x\,dx=x\log x-\int x\left(\log x\right)' dx=x\log x-\int 1dx=x\left(\log x-1\right)$$

問 10-2：

(1) $t=\sqrt{2x+2}$ とおく。$x:0\to1$ の時、$t:\sqrt{2}\to2$ である。$t^2=2x+2$ より、$2t\,dt=2dx$ である。従って、$\int_0^1\sqrt{2x+2}dx=\int_{\sqrt{2}}^2 t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^2=\frac{8-2\sqrt{2}}{3}$

となる。

(2) $I_n=\int_1^e\left(\log x\right)^n dx$ とおく。

$$\begin{aligned}I_n&=\int_1^e\left(\log x\right)^n dx\\&=\int_1^e\left(x\right)'\left(\log x\right)^n dx\\&=\left[x\left(\log x\right)^n\right]_1^e-n\int_1^e x\frac{1}{x}\left(\log x\right)^{n-1}dx=e-nI_{n-1}\end{aligned}$$

ゆえに、$I_n=e-nI_{n-1}$ である。また、$I_0=\int_0^e 1dx=e-1$ である。従って、

$I_2=e-2I_1=e-2\left(e-I_0\right)=-e+2(e-1)=e-2$ となる。

問 10-3：

(1) $k\le x\le k+1$ の時、$\frac{1}{k}\ge\frac{1}{x}$ が成り立つ。恒等的に等しくはないので、

$\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx > \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$ が成り立つ。左辺は $\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx = \frac{1}{k}$ となる。k を 1 から n まで動かした和をとると、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} > \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx = \left[\log|x|\right]_1^{n+1} = \log(n+1)$$

となる。

（2）　（1）より $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \geq \lim_{n\to\infty}\log(n+1) = \infty$ 、従って、$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \infty$ となる。

補遺

定理： $k+1$ 個のベクトル $b_1,...,b_{k+1}$ 各々が k 個のベクトル $a_1,...,a_k$ の１次結合として表されるならば、$b_1,...,b_{k+1}$ は１次従属である。

（証明） k に関する帰納法による。

（1） $k=1$ の時、$\begin{cases} b_1 = \lambda_1 a_1 \\ b_2 = \lambda_2 a_1 \end{cases}$ と表されているとする。$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ならば、例えば、$b_1 + b_2 = 0$ となり、b_1, b_2 は１次従属である。λ_1, λ_2 の少なくとも一方が 0 ではない場合、$\lambda_2 b_1 - \lambda_1 b_2 = 0$ となり、b_1, b_2 は１次従属である。

（2） $k-1$ の時、主張が成立していると仮定する。

$$\begin{cases} b_1 = s_{11}a_1 + \cdots + s_{1k}a_k \\ \quad\vdots \\ b_{k+1} = s_{k+11}a_1 + \cdots + s_{k+1k}a_k \end{cases}$$

と表されているとする。a_k の係数がすべて 0 ではないと仮定して進む（すべてが 0 の場合は、以下で $s_{1k} = \cdots = s_{kk} = 0$ とおいた関係式が成り立つ）。また、（行の順序を入れ替えればよいので） $s_{k+1k} \neq 0$ と仮定しても一般性を失わない。一番下の等式を利用して a_k を消去すると

$$\begin{cases} b_1 - \dfrac{s_{1k}}{s_{k+1k}} b_{k+1} = \left(s_{11} - \dfrac{s_{1k}}{s_{k+1k}} s_{k+11} \right) a_1 + \cdots + \left(s_{1k-1} - \dfrac{s_{1k}}{s_{k+1k}} s_{k+1k-1} \right) a_{k-1} \\ \qquad\qquad\vdots \\ b_k - \dfrac{s_{kk}}{s_{k+1k}} b_{k+1} = \left(s_{k1} - \dfrac{s_{kk}}{s_{k+1k}} s_{k+11} \right) a_1 + \cdots + \left(s_{kk-1} - \dfrac{s_{kk}}{s_{k+1k}} s_{k+1k-1} \right) a_{k-1} \end{cases}$$

となる。左辺の k 個のベクトルが右辺の $k-1$ 個のベクトルの１次結合として表されている。帰納法の仮定より、左辺の k 個のベクトルは１次従属であるので、すべてが 0 ではない $\lambda_1,...,\lambda_k$ を利用して

$$\lambda_1\left(b_1-\frac{s_{1k}}{s_{k+1k}}b_{k+1}\right)+\cdots+\lambda_k\left(b_k-\frac{s_{kk}}{s_{k+1k}}b_{k+1}\right)=0$$

と書ける。これを書き換えると、

$$\lambda_1 b_1+\cdots+\lambda_k b_k+\left(-\frac{\lambda_1 s_{1k}}{s_{k+1k}}-\cdots-\frac{\lambda_k s_{kk}}{s_{k+1k}}\right)b_{k+1}=0$$

となり、$b_1,...,b_{k+1}$は1次従属となる。**（証明終わり）**

系：線形空間Vのk個のベクトル$a_1,...,a_k$が1次独立で、Vの任意のベクトルxが$a_1,...,a_k$の1次結合として表されるならば、Vの任意の$k+1$個のベクトルは1次従属である。

(証明）$k+1$個のベクトルの各々がk個のベクトル$a_1,...,a_k$の1次結合として表されるので、前述の定理より、この$k+1$個のベクトルは1次従属である。**（証明終わり）**

定理：線形空間の任意のベクトルはその基底の1次結合として一意に表せる。

（証明）線形空間をV、任意のベクトルをx、次元をn、基底を$u_1,...,u_n$とする。次元がnであるから、$u_1,...,u_n$とxは1次従属であるので、少なくとも1つは0ではない$\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n$に対して$\lambda_0 x+\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_n u_n=0$が成り立つ。
$\lambda_0=0$と仮定すると、$u_1,...,u_n$が1次独立であることに矛盾するので、$\lambda_0\neq 0$である。従って、xは$x=-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}u_1-\cdots-\frac{\lambda_n}{\lambda_0}u_n$と基底$u_1,...,u_n$の1次結合として表現できる。

$x=\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_n u_n=\beta_1 u_1+\cdots+\beta_n u_n$と表現できたとする。これを変形して$(\alpha_1-\beta_1)u_1+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)u_n=0$と$u_1,...,u_n$が1次独立であることより$\alpha_1=\beta_1,...,\alpha_n=\beta_n$となる。すなわち、$x$の$u_1,...,u_n$による1次結合としての表現は一意である。**（証明終わり）**

性質：k個のベクトル$x_1,...,x_k\in V$の1次結合すべてからなる線形空間を$\langle x_1\ \cdots\ x_k\rangle$と書くことにする。すなわち、
$\langle x_1\ \cdots\ x_k\rangle=\{\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k\,|\,\lambda_1,...,\lambda_k\in\mathbb{R}\}$である。この時、$\langle x_1\ \cdots\ x_k\rangle$

の次元は $x_1,\ldots,x_k \in V$ の 1 次独立なベクトルの個数（r とする）に等しい。
$\dim\langle x_1 \quad \cdots \quad x_k\rangle = r$ 、特に、最初の r 個が 1 次独立の場合、
$\langle x_1 \quad \cdots \quad x_k\rangle = \langle x_1 \quad \cdots \quad x_r\rangle$ となる。

（証明）完全を期して、まず、$\langle x_1 \quad \cdots \quad x_k\rangle$ が線形空間であることをチェックする。$y,z \in \langle x_1 \quad \cdots \quad x_k\rangle, \lambda \in \mathbb{R}$ とする。
$y = \lambda_1^y x_1 + \cdots + \lambda_k^y x_k, z = \lambda_1^z x_1 + \cdots + \lambda_k^z x_k$ と書ける。

$$y + z = \left(\lambda_1^y + \lambda_1^z\right)x_1 + \cdots + \left(\lambda_k^y + \lambda_k^z\right)x_k \in \langle x_1 \quad \cdots \quad x_k\rangle$$
$$\lambda y = \left(\lambda\lambda_1^y\right)x_1 + \cdots + \left(\lambda\lambda_k^y\right)x_k \in \langle x_1 \quad \cdots \quad x_k\rangle$$

より、$\langle x_1 \quad \cdots \quad x_k\rangle$ は線形空間である。

$x_1,\ldots,x_k \in V$ の 1 次独立なベクトルを（順序を入れ替えればよいので）最初の r 個の $x_1,\ldots,x_r$ としても一般性を失わない。残りの $k-r$ 個の x は $x_1,\ldots,x_r$ の 1 次結合として表されるので、$\langle x_1 \quad \cdots \quad x_k\rangle$ の任意の元は $x_1,\ldots,x_r$ の 1 次結合として表される。従って、$\dim\langle x_1 \quad \cdots \quad x_k\rangle = r$ であり、
$\langle x_1 \quad \cdots \quad x_k\rangle = \langle x_1 \quad \cdots \quad x_r\rangle$ となる。**（証明終わり）**

定理：$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k$ を $\mathbb{R}^n$ の 1 次独立なベクトルとする。$\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_k$ を以下のように作れば、この $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_k$ は互いに直交する（この方法はグラム・シュミットの直交化法と呼ばれる）。

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a}_k - \dfrac{(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_1)}{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}\boldsymbol{b}_1 - \cdots - \dfrac{(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{b}_{k-1})}{(\boldsymbol{b}_{k-1},\boldsymbol{b}_{k-1})}\boldsymbol{b}_{k-1} \end{cases}$$

（証明）まず、$\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_k$ はどれも $\boldsymbol{0}$ ベクトルではない。もし、$\boldsymbol{b}_j$ が $\boldsymbol{0}$ ベクトルならば、$\boldsymbol{a}_j$ が $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{j-1}$ の 1 次結合になり、$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k$ が 1 次独立なベクトルであ

ることに矛盾する。$\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_k$ が互いに直交することを帰納法で示す。まず、$\left(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\right)=\left(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2-\frac{\left(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1\right)}{\left(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1\right)}\boldsymbol{b}_1\right)=\left(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1\right)-\frac{\left(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1\right)}{\left(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1\right)}\left(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1\right)=0$ より、$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ は直交する。次に、$\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_j$ が互いに直交すると仮定する。

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_{j+1}\right)&=\left(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{a}_{j+1}-\frac{\left(\boldsymbol{a}_{j+1},\boldsymbol{b}_1\right)}{\left(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1\right)}\boldsymbol{b}_1-\cdots-\frac{\left(\boldsymbol{a}_{j+1},\boldsymbol{b}_j\right)}{\left(\boldsymbol{b}_j,\boldsymbol{b}_j\right)}\boldsymbol{b}_j\right)\\&=\left(\boldsymbol{a}_{j+1},\boldsymbol{b}_i\right)-\frac{\left(\boldsymbol{a}_{j+1},\boldsymbol{b}_i\right)}{\left(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_i\right)}\left(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_i\right)=0\left(i=1,\ldots,j\right)\end{aligned}$$

より $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_{j+1}$ は互いに直交する。従って、$\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_k$ は互いに直交する。**（証明終わり）**

定理：$\operatorname{rank} AB\le\operatorname{rank} A,\operatorname{rank} B$

（証明） $\operatorname{rank} B=t$ とおき、B の列ベクトル $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_t$ が 1 次独立と仮定する。以下で $\mathbb{R}^*$ は適切な次元の列ベクトル空間とする。まず、定義より

$$\operatorname{rank} AB=\dim\left\{AB\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^*\right\}$$
$$\operatorname{rank} B=\dim\left\{B\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^*\right\}$$
$$\operatorname{rank} A=\dim\left\{A\boldsymbol{y}\,\middle|\,\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^*\right\}$$

である。

$\left\{B\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^*\right\}=\left\langle\boldsymbol{b}_1\cdots\boldsymbol{b}_t\right\rangle$ と $\left\{AB\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^*\right\}=\left\langle A\boldsymbol{b}_1\cdots A\boldsymbol{b}_t\right\rangle$ より $\dim\left\{AB\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^*\right\}\le t=\operatorname{rank} B$ である。

また、$\left\{AB\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^*\right\}\subset\left\{A\boldsymbol{y}\,\middle|\,\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^*\right\}$ であり、2 つの線形空間 X,Y に対して $X\subset Y\Rightarrow\dim X\le\dim Y$ が成り立つ。

以上より、$\operatorname{rank} AB\le\operatorname{rank} A,\operatorname{rank} B$ となる。**（証明終わり）**

性質：正方行列Aの逆行列A^{-1}が存在することが分かっているとする。この時、$AB=I$を示せば、$B=A^{-1}$である。また、$CA=I$を示せば、$C=A^{-1}$である。

（証明） $A^{-1}A=I$の両辺に右からBを、また、$AA^{-1}=I$の両辺に左からCをかけると

$$\begin{aligned} \left(A^{-1}A\right)B=IB \quad & C\left(AA^{-1}\right)=CI \\ A^{-1}(AB)=B \quad & (CA)A^{-1}=C \\ A^{-1}=B \quad & A^{-1}=C \end{aligned}$$

となり、$B=A^{-1}$、また、$C=A^{-1}$である。**（証明終わり）**

定理：Aが（n次の）正則行列ならば、任意の$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$に対して方程式$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$は一意の解を持つ。また、その転置行列$A'$も正則行列である。

（証明） $\left\{A\boldsymbol{x}\middle|\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\right\}=\left\{x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n\middle|x_1,...,x_n\in\mathbb{R}\right\}$の次元が$n$なので、$\boldsymbol{a}_1,...,\boldsymbol{a}_n$は1次独立となり$\left\{A\boldsymbol{x}\middle|\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\right\}=\mathbb{R}^n$の基底となる。従って、任意の$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$は$\boldsymbol{a}_1,...,\boldsymbol{a}_n$の1次結合として一意に表される。

$A'=\left(\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n\right)$とおくと$A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'_1\\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}'_n\end{pmatrix}$である。$\mathbb{R}^n$の基本ベクトルを$\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n$とする。$n$個の方程式$A\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{e}_j\ (j=1,...,n)$の各々一意の解$\boldsymbol{x}_j\in\mathbb{R}^n$を利用すると、

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'_1\\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}'_n\end{pmatrix}\left(\boldsymbol{x}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n\right)=\left(\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_n\right)=I$$

となり、$\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_i'\boldsymbol{x}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$ となる。

$\boldsymbol{x}_j' \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j \ (j = 1,\dots,n)$ より、$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{0} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ が成り立つ。すなわち、$\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ は 1 次独立であり、$\operatorname{rank} A' = n$ となる。**（証明終わり）**

系： A が（n 次の）正則行列ならば、$AX = YA = I$ となる X, Y が存在し、$X = Y = A^{-1}$ である。

（証明） 前定理とその証明より、$AX = A'Y' = I$ となる X, Y が存在する。この時、$YA = (A'Y')' = I' = I$ となる。$X = IX = (YA)X = Y(AX) = YI = Y$ であるので、$AX = XA = I$ 、すなわち、$X = Y = A^{-1}$ となる。**（証明終わり）**

定理： n 次の正方行列 A が逆行列を持つ必要かつ十分条件は A が正則行列であることである。

（証明）（=>） $AA^{-1} = I$ ならば $\operatorname{rank} I = n \le \operatorname{rank} A$ である。また、$\operatorname{rank} A \le n$ であることより $\operatorname{rank} A = n$ 、すなわち、A は正則行列である。

（<=） A を正則行列とする。前系より A は逆行列を持つ。**（証明終わり）**

定理： n 次の正方行列 A が正則行列ならば、$\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} B$ である。

（証明） まず、$\operatorname{rank} AB \le \operatorname{rank} B, \operatorname{rank} BA \le \operatorname{rank} B$ である。また、$B = A^{-1}(AB), B = (BA)A^{-1}$ より $\operatorname{rank} B \le \operatorname{rank} AB, \operatorname{rank} B \le \operatorname{rank} BA$ である。従って、$\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} B$ である。**（証明終わり）**

定理： $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形変換 f は適切に m 行 n 列行列 A を決めれば、$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ と表現できる。A は $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ の f による像を左から並べたものである。

（証明） $\boldsymbol{e}_1,\dots$ を $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ の基本ベクトルとする。
$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ である。$f(\boldsymbol{e}_j) \in \mathbb{R}^m \ (j = 1,\dots,n)$ を左から並べた

m行n列行列をAとする。すなわち、$A=\left(f(\boldsymbol{e}_1) \quad \cdots \quad f(\boldsymbol{e}_n)\right)$である。$f$が線形変換であるので、

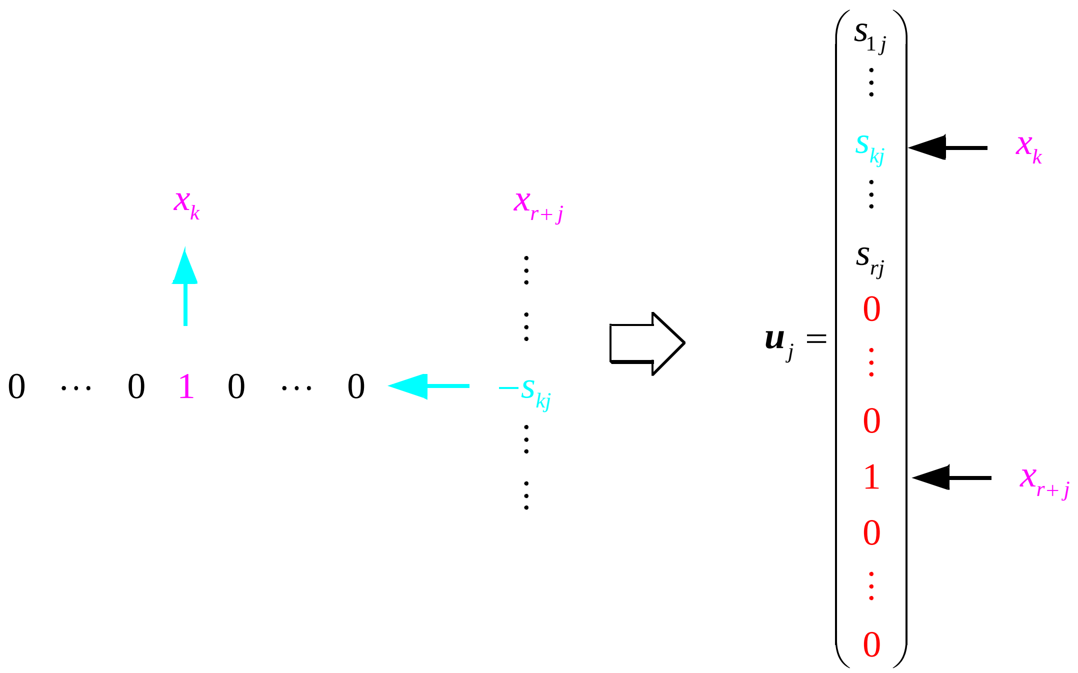
$$f(\boldsymbol{x})=f\left(x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n\right)=\sum_{j=1}^{n}x_j f(\boldsymbol{e}_j)=A\boldsymbol{x}$$

となる。**（証明終わり）**

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$の解の覚え方： ただし、$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$、

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_r & x_{r+1} & \cdots & x_n \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & -s_{11} & \cdots & -s_{1n-r} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -s_{21} & \cdots & -s_{2n-r} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -s_{r1} & \cdots & -s_{rn-r} \end{pmatrix}$$

とする。（Aの1行目には対応する変数が記入してある。）基本ベクトル$\boldsymbol{e}_1,\ldots$の上に書かれている変数を**基底変数**、それ以外を**非基底変数**と呼ぶ。$x_1,\ldots,x_r$が基底変数で、$x_{r+1},\ldots,x_n$が非基底変数である。$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$の解$\boldsymbol{x}$は非基底変数の個数（$n-r$個）の1次独立なベクトル$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_{n-r}$の1次結合
$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\alpha_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$として表現できる。$\boldsymbol{u}_j\left(j=1,\ldots,n-r\right)$は次で与えられる（下図も参照）。



まず、$\boldsymbol{u}_j$ の非基底変数 $x_{r+1},\dots,x_n$ に対応する部分（上記の A の場合、$r+1$ 行目から n 行目まで）は、x_{r+j} に対応する所（上記の A の場合、$r+j$ 行目）が1で、他の非基底変数の所は0とする（上図の赤色の部分）。次に、基底変数 $x_1,\dots,x_r$ に対応する部分（上記の A の場合、1行目から r 行目まで）は A の x_{r+j} の列、すなわち、$r+j$ 列の要素から次のようにして作られる。この列の各々の要素に対して次のことを行う：

選んだ要素（$-s_{kj}$ とする）が存在する第 k 行の左側を見て基底変数の列にある1を探す。見つけた1のある列の変数の位置（上記の A の場合は x_k であるので、k 行目である）に符号を変えた s_{kj} を記入する（上図の水色の部分）。

以上より、

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ \vdots \\ s_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ \vdots \\ s_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r} = \begin{pmatrix} s_{1n-r} \\ \vdots \\ s_{rn-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

定理： $\operatorname{rank} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{rank} A$

（証明） Aをm行n列行列、$\operatorname{rank} A = r$、$A^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_m\right)$とおく。
$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\left(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\right)$の解の線形空間の次元は$n-r$であった。（定理より）この基底として互いに直交する$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$を選ぶ。
$\left(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{u}_j\right) = 0\left(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n-r\right)$である。更に、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$を適切に選び、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$すべてが互いに直交し$\mathbb{R}^n$の基底になるようにする。
$\boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^n$より$\boldsymbol{b}_i = c_{i1}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_{in-r}\boldsymbol{u}_{n-r} + d_{i1}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_{ir}\boldsymbol{v}_r$と表せる。$\boldsymbol{b}_i$と$\boldsymbol{v}_j$は直交していたので、

$$0 = \left(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{u}_j\right) = c_{i1}\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_j\right) + \cdots + c_{in-r}\left(\boldsymbol{u}_{n-r}, \boldsymbol{u}_j\right) + d_{i1}\left(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_j\right) + \cdots + d_{ir}\left(\boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{u}_j\right)$$

より、$c_{ij} = 0\left(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n-r\right)$となる。従って、
$\operatorname{rank} A' = \dim\left\langle \boldsymbol{b}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{b}_m \right\rangle \leq r$となる。もし、$\operatorname{rank} A' < r$ならば、ある$\boldsymbol{v}_j$に対して$\left(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{v}_j\right) = 0\left(i = 1, \ldots, m\right)$となる。これは$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$以外に
$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\left(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\right)$の解$\boldsymbol{v}_j$があることを意味し、$\operatorname{rank} A = r$に矛盾する。以上より、$\operatorname{rank} A' = r = \operatorname{rank} A$となる。**（証明終わり）**

定理：非同次連立 1 次方程式$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$が解を持つとする。そのとき、その解は同次方程式$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$の一般解と$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$の特殊解の和である。

（証明） $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の（任意の）特殊解を $\boldsymbol{s}$ とおくと、 $A\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b}$ である。また、 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}$ とおき、未知数を $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ へ変換する。 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に代入すると $A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}+A\boldsymbol{s}=A\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$ より、 $A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$、すなわち、 $\boldsymbol{y}$ は同時方程式の解であり、一般解として与えられる。従って、非同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ は同時方程式の一般解 $\boldsymbol{y}$ と特殊解 $\boldsymbol{s}$ の和で表される。 **（証明終わり）**

性質：関数 $\det$ は次を満たす：

（5） $\det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)=0$

（6）

$$\det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)=\det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \lambda\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)$$

（7） $\det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{0} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)=0$

（証明） （5） $D=\det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)$ とおく。2 つの $\boldsymbol{a}_i$ を交換すると、符号が変わるので、 $D=-D$ となる。従って、 $D=0$ となる。

（6）

$$\begin{aligned}\det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \lambda\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)&=\lambda\det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)\\&\quad+\det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)\\&=\det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)\end{aligned}$$

（7） 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ を利用して、

$$\begin{aligned}\det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{0} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)&=\det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{a} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)\\&=\det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)-\det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)\\&=0\end{aligned}$$

（証明終わり）

性質：次が成り立つ。

（1） $|AP_j(\lambda)|=\lambda|A|, |AP_{ij}|=-|A|, |AP_{ij}(\lambda)|=|A|$

（2） $|P_j(\lambda)|=\lambda, |P_{ij}|=-1, |P_{ij}(\lambda)|=1, |P_j^{\mathrm{T}}(\lambda)|=\lambda, |P_{ij}^{\mathrm{T}}|=-1, |P_{ij}^{\mathrm{T}}(\lambda)|=1$ であり、 $|AP_j(\lambda)|=|A||P_j(\lambda)|, |AP_{ij}|=|A||P_{ij}|, |AP_{ij}(\lambda)|=|A||P_{ij}(\lambda)|$ である。

（3） A が正則行列でなければ、 $|A|=0$ である。また、 A が正則行列ならば、 $|A|\neq 0$ である。従って、 A が正則行列であるための必要かつ十分条件は $|A|\neq 0$ である。

（4） $|A^{\mathrm{T}}|=|A|$

（5） $|AB| = |A||B|$

（6） $\begin{vmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{22}|$

（7） 特に、$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

（証明）（1） det の性質の（2）（4）（6）により、成立する。

（2） （1）で $A = I$ とおけば得られる。また、
$P_j^{\mathrm{T}}(\lambda) = P_j(\lambda), P_{ij}^{\mathrm{T}} = P_{ij}, P_{ij}^{\mathrm{T}}(\lambda) = P_{ji}(\lambda)$ より $|P_j^{\mathrm{T}}(\lambda)| = \lambda, |P_{ij}^{\mathrm{T}}| = -1, |P_{ij}^{\mathrm{T}}(\lambda)| = 1$ である。（1）より $|AP_j(\lambda)| = |A||P_j(\lambda)|, |AP_{ij}| = |A||P_{ij}|, |AP_{ij}(\lambda)| = |A||P_{ij}(\lambda)|$ である。

（3） A が正則行列でなければ、A のある列ベクトル $\boldsymbol{a}$ が他の列ベクトルの 1 次結合 $\boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \boldsymbol{a}_j$ として表される。従って、ある列の定数倍を他の列に加えるタイプの基本変形を適当な回数行うことによって、ある列ベクトルを $\mathbf{0}$ とすることができる。det の性質（7）により $|A| = 0$ となる。A が正則行列ならば、$P_{ij}, P_j(c), P_{ij}(c)\ (c \neq 0)$ のタイプの基本変形の行列の積として表現できる（=>ここ）。$|A|$ はこれらの行列式の積であるので。（2）より $|A| \neq 0$ となる。

（4） A が正則であれば A^{T} も正則であり、A が正則でなければ A^{T} も正則ではない。従って、A が正則でなければ $|A| = 0 = |A^{\mathrm{T}}|$ となる。A が正則であれば、$A = P_1 \cdots P_k$ と基本変形の行列の積で表される。$A^{\mathrm{T}} = P_k^{\mathrm{T}} \cdots P_1^{\mathrm{T}}$ であり、
$|A| = |P_1| \cdots |P_k|, |A^{\mathrm{T}}| = |P_k^{\mathrm{T}}| \cdots |P_1^{\mathrm{T}}|, |P_1| = |P_1^{\mathrm{T}}|, \ldots, |P_k| = |P_k^{\mathrm{T}}|$ であるので、$|A^{\mathrm{T}}| = |A|$ となる。

（5） B が正則ではない時、$\mathrm{rank}\, AB \le \mathrm{rank}\, B$ より AB も正則ではない。従って、$|AB| = 0 = |B| = |A||B|$ となる。B が正則である時、B を基本変形の行列の積 $B = P_1 \cdots P_k$ で表して、（2）を利用すると、
$|AB| = |AP_1 \cdots P_k| = |A||P_1| \cdots |P_k| = |A||B|$ となる。

（6） （略）

（7） （4）と（6）より成り立つ。**（証明終わり）**

クラメールの公式：n 個の未知数、n 個の式を含む非同時連立１次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ において A が正則行列の時、解は次の公式で与えられる：

$$x_j=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}\ (j=1,\ldots,n)$$

ただし、分子は A の j 列を $\boldsymbol{b}$ に置き換えたものである。

（証明） $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の左から A の逆行列をかけて変形していくと

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{adj}\,A)\boldsymbol{b}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x_j=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{1j} & A_{2j} & \cdots & A_{nj} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x_j=\frac{A_{1j}b_1+A_{2j}b_2+\cdots+A_{nj}b_n}{|A|}$$

$$x_j=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}\ (j=1,\ldots,n)$$

となり、結果が得られる。**（証明終わり）**

定理： $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_1 \end{pmatrix}$ ならば、
$f_A(\lambda)=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}-\cdots-a_{n-1}\lambda-a_n$ である。

（証明） 行列 A の次数 n に関する帰納法で証明する。 $n=2$ の時、
$f_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & -a_2 \\ -1 & \lambda-a_1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-a_1)-a_2=\lambda^2-a_1\lambda-a_2$ より、定理は成り立つ。

$n-1$ の時に成り立つと仮定する。 $f_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & -a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda-a_1 \end{vmatrix}$ を第 1 行で展開すると、

$$f_A(\lambda)=\lambda\left(\lambda^{n-1}-a_1\lambda^{n-2}-\cdots-a_{n-2}\lambda-a_{n-1}\right)+(-1)^n a_n\begin{vmatrix} -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$
$$=\lambda\left(\lambda^{n-1}-a_1\lambda^{n-2}-\cdots-a_{n-2}\lambda-a_{n-1}\right)+(-1)^{2n-1}a_n$$
$$=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}-\cdots-a_{n-2}\lambda^2-a_{n-1}\lambda-a_n$$

となり、n の時も成り立つ。 **（証明終わり）**

定理： A を正方行列、P を正則行列とすると、 $f_A(\lambda)=f_{PAP^{-1}}(\lambda)$ である。

（証明）
$f_{PAP^{-1}}(\lambda)=|\lambda I-PAP^{-1}|=|\lambda PIP^{-1}-PAP^{-1}|=|P||\lambda I-A||P^{-1}|=|\lambda I-A|=f_A(\lambda)$
（証明終わり）

定理（正方行列の三角化）：正方行列Aの固有値を$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$とすれば、適当な正則行列$P$を利用して、$PAP^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ * & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ * & \cdots & * & \lambda_n\end{pmatrix}$とできる。

（証明）$\lambda_1 I-A$は正則行列ではないので、適当な正則行列P_1を用いて、

$P_1(\lambda_1 I-A)P_1^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ * & * & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ * & * & \cdots & *\end{pmatrix}$とできる（=>ここを参照）。これより、

$P_1AP_1^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ * & * & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ * & * & \cdots & *\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ \hline * & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ * & & & \end{array}\right)$となる。ここで、$A_2$は$A$より次数が1つ小さい正方行列であり、その固有値は$\lambda_2,\cdots,\lambda_n$である。$A_2$に同様のことを行えば、適当な正則行列$\tilde{P}_2$を用いて$\tilde{P}_2A_2\tilde{P}_2^{-1}=\left(\begin{array}{c|ccc}\lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ \hline * & & & \\ \vdots & & A_3 & \\ * & & & \end{array}\right)$とできる。$P_2=\left(\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{P}_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$とおけば、結局、

$P_2P_1AP_1^{-1}P_2^{-1}=\left(\begin{array}{cc|ccc}\lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ * & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ \hline \vdots & * & & & \\ \vdots & \vdots & & A_3 & \\ * & * & & & \end{array}\right)$となる。これを繰り返せば、

$$P_n \cdots P_2 P_1 A P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_n^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & * & \cdots & * & \lambda_n \end{pmatrix}$$ となり、$P = P_n \cdots P_2 P_1$ とおけばよい。**（証明終わり）**

定理（ハミルトン - ケーリー）：正方行列 A に対して $f_A(A) = O$（零行列）が成り立つ。

（証明）前定理より A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とすれば、適当な正則行列 P を利用して、$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & \lambda_n \end{pmatrix} = B$$ とできる。まず、

$f_A(A) = P^{-1} f_A(B) P$ である。$f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_n) \cdots (\lambda - \lambda_1)$ より

$$\begin{aligned} f_A(B) &= (B - \lambda_n I) \cdots (B - \lambda_1 I) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \\ * & \lambda_2 - \lambda_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & \lambda_n - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \lambda_2 - \lambda_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & \lambda_n - \lambda_1 \end{pmatrix} \\ &= O \end{aligned}$$

ここで、上記の右辺の n 項の積の計算において、一番右にある 2 項の積に（=> ここの）性質を何回も用いて、最後の結果を得た。従って、
$f_A(A) = P^{-1} O P = O$ となる。**（証明終わり）**

定理（固有ベクトルの 1 次独立性）：相異なる固有値に属する固有ベクトルは 1 次独立である。

（証明） A の相異なる固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ とし、その固有ベクトルを、各々、$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ とする。A の相異なる固有値の個数 k に関する数学的帰納法で証明する。$k = 1$ の時、$\boldsymbol{x}_1 (\neq \boldsymbol{0})$ は 1 次独立である。

k 個未満の時は成立すると仮定する。$a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_k\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$ とおく。$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ を 1 次従属と仮定する。すなわち、$a_1,\cdots,a_k$ のうち、少なくとも 1 つは 0 ではないと仮定する。$a_k\neq 0$ としても、一般性を失わない。

$$\boldsymbol{x}_k=-\frac{a_1}{a_k}\boldsymbol{x}_1-\cdots-\frac{a_{k-1}}{a_k}\boldsymbol{x}_{k-1}$$

の両辺に左から A をかけ、λ_k で割ると、

$$\boldsymbol{x}_k=-\frac{a_1}{a_k}\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\boldsymbol{x}_1-\cdots-\frac{a_{k-1}}{a_k}\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\boldsymbol{x}_{k-1}$$

この 2 式より、

$$\frac{a_1}{a_k}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)\boldsymbol{x}_1+\cdots+\frac{a_{k-1}}{a_k}\left(1-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right)\boldsymbol{x}_{k-1}=\boldsymbol{0}$$

帰納法の仮定より、$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{k-1}$ は 1 次独立であり、$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ は相異なるので、$a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=0$ となり、$a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_k\boldsymbol{x}_k=a_k\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{0}$ となって、矛盾する。すなわち、$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ は 1 次独立である。**（証明終わり）**

定理（正方行列の対角化）：n 次の正方行列 A が対角化可能である必要かつ十分条件は n 個の 1 次独立な固有ベクトルが存在することである。この n 個の 1 次独立な固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,...,\boldsymbol{p}_n$ とし $P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}$ とおけば、

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

となる。ただし、$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ は A の固有値で $\boldsymbol{p}_i$ は λ_i の固有ベクトルである。

（証明）（=>）A が対角化可能であれば、正則行列 P が存在し、

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

となる。ここで、$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ は A の固有値とな

る。P を左側からかけると、$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ となり、

$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$ とおけば、$A\boldsymbol{p}_j = \lambda_j \boldsymbol{p}_j$ となり、$\boldsymbol{p}_j$ は λ_j の固有ベクトルである。また、$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ..., \boldsymbol{p}_n$ は 1 次独立である。

（<=） A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ とし、$\boldsymbol{p}_i$ を λ_i の固有ベクトルとする。
$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$ とおけば、$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ..., \boldsymbol{p}_n$ が 1 次独立なので、P は正則行列で、$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ である。左から P^{-1} をかければ、

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ となり、A は対角化可能である。**（証明終わり）**

<u>定理（対称行列の固有値と固有ベクトル）：</u>
（1）対称行列の固有値はすべて実数である。
（2）対称行列の相異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。

（証明）（1）対称行列 A の固有値と固有ベクトルを $a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ と $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\bullet})$ とする。

$$A(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = (a + ib)(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y})$$
$$A\boldsymbol{x} + iA\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x} - b\boldsymbol{y} + i(b\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y})$$

より、$A\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} - b\boldsymbol{y}, A\boldsymbol{y} = b\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}$ である。

$$\begin{aligned}(a\boldsymbol{x} - b\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} &= (A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \\ &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} (A\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} (b\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

より、となり、$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}>0$であるから、$b=0$、すなわち、固有値は実数となる。

（2）対称行列Aの相異なる 2 つの固有値と固有ベクトルを、各々、λ,μと$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$とする。$\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\left(A\boldsymbol{x}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(A\boldsymbol{y}\right)=\mu\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$より、$(\lambda-\mu)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=(\lambda-\mu)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$となり、$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$、すなわち、$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$は直交する。 **（証明終わり）**

定理（対称行列の直交行列による対角化）：n次の対称行列Aは適当な直交行列Uによって対角化可能である。すなわち、Aのn個の固有値を$\lambda_1,\dots,\lambda_n$とし、各々に属する（要素が実数である）固有ベクトル$\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$を、長さが 1 で互いに直交するようにできる。$U=\left(\boldsymbol{x}_1\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n\right)$とおけば、

$$U^{-1}AU=U^{\mathrm{T}}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$となる。

（証明）直前の 2 つの定理より「λが対称行列Aの固有方程式$f_A(\lambda)=\left|\lambda I-A\right|=0$の$r$重解の時、1 次独立な$r$個の固有値$\lambda$に属する固有ベクトルが存在する」ことを示せばよい。

$B=\left(\lambda I-A\right)^r$とおく。次の（1）と（2）を示せばよい。

（1）同時方程式$B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$の解$\boldsymbol{x}(\neq\boldsymbol{0})$は対称行列$A$の固有値$\lambda$に属する固有ベクトルである。
（2）$\operatorname{rank}B=n-r$

（1）の証明：$B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$の解$\boldsymbol{x}(\neq\boldsymbol{0})$が対称行列$A$の固有値$\lambda$に属する固有ベクトルではない、すなわち、$\boldsymbol{y}_1=(\lambda I-A)\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$と仮定する。
$0\neq\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\lambda I-A^{\mathrm{T}})(\lambda I-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\lambda I-A)^2\boldsymbol{x}$より、
$\boldsymbol{y}_2=(\lambda I-A)^2\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$となる。これを繰り返すと、
$\boldsymbol{y}_{2^k}=(\lambda I-A)^{2^k}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\ (k=1,2,\cdots)$となるが、これは$B\boldsymbol{x}=(\lambda I-A)^r\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$に矛盾する。従って、$\boldsymbol{y}_1=(\lambda I-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$、すなわち、$\boldsymbol{x}(\neq\boldsymbol{0})$は対称行列$A$の固有値$\lambda$に属する固有ベクトルである。

（2）の証明：Aの固有値を
$\lambda_1=\lambda,\cdots,\lambda_r=\lambda,\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_n\left(\lambda_j\neq\lambda, j=r+1,\cdots,n\right)$とする。定理（正方行列の三角化）より適当な正則行列Pを利用して、

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{r+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とできるので、

$$P\left(\lambda I-A\right)P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda-\lambda_{r+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * & \lambda-\lambda_n \end{pmatrix}$$

となる。この行列の左上のr次の小行列の対角要素は0である。この行列のr乗を計算する時に一番右の方から行う。一番右にある2項の積に（=>ここの）性質を$r-1$回用いて、

$$PBP^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ * & \cdots & * & \left(\lambda-\lambda_{r+1}\right)^r & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * & \left(\lambda-\lambda_n\right)^r \end{pmatrix}$$

となる。この行列において、最初のr行は0からなり、右下の$n-r$次の小行列の対角要素は非零なので、$\operatorname{rank}B=n-r$となる。

（証明終わり）

定理：さまざまな関数を微分すると次のようになる：

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x$$

$$\left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$a > 0, a \neq 1$の時、

$\left(a^x\right)' = \left(\log a\right)a^x$ 特に、$\left(e^x\right)' = e^x$ である。

$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\log a}$ 特に、$\left(\log x\right)' = \dfrac{1}{x}$ である。

（証明）

2 項定理$\left(x+h\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$ を利用する。2 項定理より

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\left(x+h\right)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}$ となる。

次の 2 つの公式；$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$、$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ を利用する。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+h\right)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

となる。

公式$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ を利用する。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+h\right)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}\right) = -\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x$$

となる。

$\left(\tan x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ はこちらへ。

$\left(a^x\right)' = \left(\log a\right)a^x$ はこちらへ。

$\left(e^x\right)' = e^x$ はこちらへ。

公式 $\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e$ を利用する。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(x+h\right)-\log_a x}{h} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\log a}$$ となる。

「$\left(e^x\right)' = e^x$」：$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e$ の対数を取ると、

$\lim_{x\to 0}\log\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\log\left(1+x\right)}{x} = \log e = 1$ となる。$y = \log\left(1+x\right)$ とおくと

$x = e^y - 1$ であり $y \to 0$ の時 $x \to 0$ である。従って、

$\lim_{y\to 0}\dfrac{e^y-1}{y} = \lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\log\left(1+x\right)} = 1$ となる。これより

$\lim_{h\to 0}\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}e^x\dfrac{e^h-1}{h} = e^x$ となる。

（証明終わり）

定理：f と g が微分可能である時、次の公式が成り立つ：

（1） $\left(af(x)+bg(x)\right)' = af'(x)+bg'(x)$　ただし、a,b は定数である。

（2） $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

（3） $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$　ただし、$g(x)\neq 0$ である。

（4） $\dfrac{d}{dx}f\left(g(x)\right) = f'\left(g(x)\right)g'(x)$

（証明）

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(af(x+h)+bg(x+h)\right)-\left(af(x)+bg(x)\right)}{h}$$

（1） $$=a\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+b\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$ となる。

$$=af'(x)+bg'(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

（2） $$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$ となる。

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

（3） まず、$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$ を証明する。

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}=-\frac{g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$ となる。

（2）を利用して、

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)'=f'(x)\frac{1}{g(x)}+f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$

$$=f'(x)\frac{1}{g(x)}-f(x)\frac{g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$ となる。

「$\left(\tan x\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$」：

$$\left(\tan x\right)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\left(\sin x\right)'\cos x-\sin x\left(\cos x\right)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

となる。

（4） $\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(g(x+h)\right)-f\left(g(x)\right)}{h}$ である。h が十分0に近い時、$g(x+h)-g(x)\neq 0$ ならば、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(g(x+h)\right)-f\left(g(x)\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(g(x+h)\right)-f\left(g(x)\right)}{g(x+h)-g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

となる。h が十分0に近い時、$g(x+h)-g(x)=0$ ならば、$g'(x)=0$ であり、

$\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(g(x+h)\right)-f\left(g(x)\right)}{h}=0$ であるので、

$\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right)=f'\left(g(x)\right)g'(x)$ となる。

「$\left(a^x\right)'=\left(\log a\right)a^x$」：$a^x=e^{x\log a}$ に注意すると、$\left(a^x\right)'=\left(e^{x\log a}\right)'$。

$f(x)=e^x, g(x)=x\log a$ とおけば $f'(x)=e^x, g'(x)=\log a$ より、

$\left(a^x\right)'=\left(e^{x\log a}\right)'=f'\left(g(x)\right)g'(x)=e^{x\log a}\log a=\left(\log a\right)a^x$ となる。

（証明終わり）

系 1： $f(x)$ は $[a,b]$ で連続、(a,b) で微分可能とする。

（1） $f'(x)>0\left(x\in(a,b)\right)$ ならば、$f(x)$ は $[a,b]$ で増加関数である。

（2） $f'(x)<0\left(x\in(a,b)\right)$ ならば、$f(x)$ は $[a,b]$ で減少関数である。

（証明） $[a,b]$ の任意の 2 点を $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$ とする。Taylor の定理より $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$ となるが存在する。従って、$f'(c)>0$ ならば $f(x_1)<f(x_2)$ となり、$f'(c)<0$ ならば $f(x_1)>f(x_2)$ となる。**（証明終わり）**

系 2： c を含む開区間において $f''(x)$ は連続で、$f'(c)=0$ であるとする。

（1） $f''(c)>0$ ならば $f(x)$ は $x=c$ で極小である。

（2） $f''(c)<0$ ならば $f(x)$ は $x=c$ で極大である。

（証明）Taylorの定理より $f(c+h)-f(c)=\dfrac{f''(c+\theta h)}{2}h^2\ (0<\theta<1)$ となる。$f''(x)$ が連続であるので、h が十分に小さい時、$f''(c)$ と $f''(c+\theta h)$ の符号は一致する。従って、$f''(c)>0$ ならば $f(c+h)>f(c)$ となり、$f''(c)<0$ ならば $f(c+h)<f(c)$ となる。**（証明終わり）**

定理：

（1）$\int (af(x)+bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$ （a,b は定数）

（2）$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$ （**部分積分法**）

（3）$\int f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int f(x)dx\ (x=\varphi(u))$ （**置換積分法**）

（4）$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|+C$

（証明）

（1）$\left(a\int f(x)+b\int g(x)dx\right)' = \left(a\int f(x)\right)' + \left(b\int g(x)dx\right)' = af(x)+bg(x)$ より、成立する。

（2）

$\left(f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-f(x)g'(x)=f'(x)g(x)$ より、成立する。

（3）$F'(x)=f(x)$ とする。$x=\varphi(u)$ の時、$\int f(x)dx = F(x) = F(\varphi(u))$ である。$\dfrac{d}{du}F(\varphi(u)) = F'(\varphi(u))\varphi'(u) = f(\varphi(u))\varphi'(u)$ より、$F(\varphi(u)) = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ となる。従って、$\int f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int f(x)dx\ (x=\varphi(u))$ となる。

（4）$u=f(x)$ とおく。$du=f'(x)dx$ より、（3）を利用して、$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \dfrac{1}{u}du = \log|u|+C = \log|f(x)|+C$ となる。

（証明終わり）